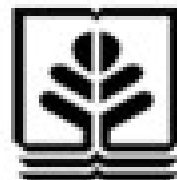


مرکز تحقیقاتی و پژوهشی کاربردی آماری



دانشگاه مازندران

مجموعه مقالات

ششمین سمینار تخصصی نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

۲۱ و ۲۲ مرداد ماه ۱۳۹۹ - دانشگاه مازندران

<http://wosdee.um.ac.ir>
Email: stat@umz.ac.ir
Tel/Fax: (011) 3530 2460
(011) 3534 5413



بسمه تعالی

مجموعه مقالات
ششمین سمینار تخصصی
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

گروه آمار، دانشگاه مازندران
بابلسر، ایران

۲۱ و ۲۲ مرداد ۱۳۹۹

این کتاب شامل مجموعه مقالات فارسی ششمین سمینار تخصصی نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن است. بدیهی است که نویسندگان محترم مسئول صحت مطالب، اصالت و ویرایش علمی و ادبی مقالات خود بوده و کمیته‌های علمی و اجرایی سمینار مسئولیتی در این موارد ندارد.

عنوان: مجموعه مقالات فارسی ششمین سمینار تخصصی نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

تدوین کننده: علی سعادت‌نیک

ویراستار: اکبر اصغرزاده نشلی، مهران نقی‌زاده قمی

طراح جلد: جوانه راکی‌زاده

تاریخ انتشار: شهریور ۱۳۹۹

پیش‌گفتار

خداوند بزرگ را سپاس‌گزاریم که ما را یاری نمود تا بتوانیم ششمین سمینار تخصصی نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن را در مرداد ماه ۱۳۹۹ با همکاری قطب علمی داده‌های تربیتی، قابلیت اعتماد و وابستگی، مرکز منطقه‌ای اطلاع‌رسانی علوم و فناوری و حمایت انجمن آمار ایران و پایگاه استنادی علوم جهان اسلام به صورت مجازی در دانشگاه مازندران برگزار کنیم.

این سمینار ابتدا قرار بود به صورت حضوری در ۲۷ و ۲۸ فروردین ۱۳۹۹ برگزار شود که به دلیل شیوع ویروس کرونا و نیز مشخص نبودن وضعیت آینده این ویروس و حفظ سلامت شرکت‌کنندگان، کمیته برگزاری این سمینار، تصمیم به برگزاری مجازی آن به صورت ویدئو کنفرانس گرفت. ایجاد فرصت مناسب برای ارائه جدیدترین دستاوردهای علمی و پژوهشی در شاخه‌های مختلف قابلیت اعتماد، تبادل نظر شرکت‌کنندگان، ارتقای سطح علمی دانشجویان و ایجاد ارتباط با کاربران قابلیت اعتماد در حوزه‌های مختلف از اهداف این سمینار می‌باشد. امیدواریم این سمینار در دستیابی به اهداف خود موفق و موجبات ارتقای این شاخه از علم آمار در ایران را فراهم آورد.

در این سمینار از بین مقالات دریافتی پس از داوری، تعداد ۳۱ مقاله به صورت سخنرانی و تعداد ۷ مقاله به صورت پوستر پذیرفته شد.

لازم می‌دانم از اعضای کمیته‌های علمی و اجرایی سمینار و نیز کمیته داوران سمینار تشکر نمایم. همچنین از ریاست محترم دانشگاه مازندران، معاونت محترم پژوهش و فناوری دانشگاه مازندران، مدیر مرکز فناوری اطلاعات دانشگاه، رئیس دانشکده علوم ریاضی و همکارانم در گروه آمار و همچنین از کارشناسان مرکز فناوری اطلاعات دانشگاه جهت پشتیبانی اجرایی و فنی این سمینار تشکر کنم. این سمینار مورد حمایت قطب علمی داده‌های تربیتی، قابلیت اعتماد و وابستگی، مرکز منطقه‌ای اطلاع‌رسانی علوم و فناوری، انجمن آمار ایران و پایگاه استنادی علوم جهان اسلام بوده است که حمایت آن‌ها خاصه حمایت و کمک‌های بی‌دریغ قطب علمی داده‌های تربیتی، قابلیت اعتماد و وابستگی شایسته تقدیر و تشکر فراوان است.

کلیه امور مربوط به دبیرخانه سمینار و نیز تهیه و تنظیم این مجموعه به عهده آقای علی سعادت‌نیک، دانش‌آموخته کارشناسی ارشد گروه آمار دانشگاه مازندران بوده است که بدین وسیله از زحمات فراوان ایشان کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم. زحمت طراحی پوستر سمینار و نیز طرح جلد این کتابچه به عهده سرکار خانم جوانه راکی‌زاده بوده است که از ایشان بابت صبر و حوصله‌ای که به خرج دادند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان از خداوند باری‌تعالی، برای همه شرکت‌کنندگان آرزوی سلامتی و شادی دارم و امیدوارم بهره علمی لازم را از این سمینار ببرند.

اکبر اصغرزاده نشلی (دبیر سمینار)

محورهای اصلی سمینار

- استنباط آماری داده‌های قابلیت اعتماد
- آزمون‌های طول عمر تسریع یافته
- الگوهای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها
- ترتیب‌های تصادفی در قابلیت اعتماد
- قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم
- مدل‌های تنش-مقاومت
- مفاهیم سالخوردگی
- قابلیت اعتماد داده‌های فرسایشی
- قابلیت اعتماد شبکه‌ها
- تحلیل بقاء
- وابستگی در مباحث طول عمر
- تحلیل ریسک در قابلیت اعتماد
- روش‌های بیزی در قابلیت اعتماد
- بهینه‌سازی در قابلیت اعتماد

• اعضای کمیته علمی (به ترتیب حروف الفبا)

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| دانشگاه فردوسی مشهد | ۱. دکتر جعفر احمدی |
| دانشگاه اصفهان | ۲. دکتر مجید اسدی |
| دانشگاه مازندران (دبیر سمینار) | ۳. دکتر اکبر اصغرزاده نشلی |
| دانشگاه بوعلی سینا همدان | ۴. دکتر ابراهیم امینی سرشت |
| دانشگاه رازی کرمانشاه | ۵. دکتر محی الدین ایزدی |
| دانشگاه مازندران | ۶. دکتر احمد پوردرویش حیدری |
| دانشگاه اصفهان | ۷. دکتر مهدی توانگر |
| دانشگاه مازندران | ۸. دکتر احسان جهانی |
| دانشگاه تهران | ۹. دکتر فیروزه حقیقی |
| دانشگاه رازی کرمانشاه | ۱۰. دکتر بهاء الدین خالدی |
| دانشگاه بیرجند | ۱۱. دکتر محمد خنجری صادق |
| دانشگاه فردوسی مشهد | ۱۲. دکتر مهدی دوست پرست |
| دانشگاه فردوسی مشهد | ۱۲. دکتر مصطفی رزمخواه |
| دانشگاه شیراز | ۱۳. دکتر سمیه زارع زاده |
| دانشگاه مازندران | ۱۴. دکتر سید محمد تقی کامل میرمصطفائی |
| دانشگاه صنعتی اصفهان | ۱۵. دکتر مریم کلکین نما |
| دانشگاه یزد | ۱۶. دکتر عیسی محمودی |
| دانشگاه مازندران (دبیر اجرایی سمینار) | ۱۷. دکتر مهران نقی زاده قمی |

• اعضای کمیته علمی خارجی

1. Prof. Coşkun Kuş. Selcuk University, Konya, Turkey
2. Prof. M. Z. Raqab. University of Amman, Jordan
3. Prof. H. K. Tony NG. Southern Methodist University, Dallas, USA

• اعضای کمیته مشاورین علمی افتخاری (به ترتیب حروف الفبا)

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| ۱. شادروان دکتر جواد بهبودیان | دانشگاه شیراز |
| ۲. دکتر ماه بانو تاتا | دانشگاه کرمان |
| ۳. دکتر احمد خدادی | دانشگاه شهید بهشتی |
| ۴. دکتر اسماعیل خرم | دانشگاه صنعتی امیر کبیر |
| ۵. دکتر علی زینل همدانی | دانشگاه صنعتی اصفهان |
| ۶. دکتر بهرام صادقپور گیلده | دانشگاه فردوسی مشهد |
| ۷. دکتر غلامرضا محتشمی برزادران | دانشگاه فردوسی مشهد |

• اعضای کمیته اجرایی (به ترتیب حروف الفبا)

- | | |
|------------------------------------|---------------------|
| ۱. دکتر جعفر احمدی | دانشگاه فردوسی مشهد |
| ۲. دکتر اکبر اصغرزاده نشلی | دانشگاه مازندران |
| ۳. دکتر معصومه اکبری لاکه | دانشگاه مازندران |
| ۴. دکتر احمد پوردرویش حیدری | دانشگاه مازندران |
| ۵. دکتر هادی جباری نوقابی | دانشگاه فردوسی مشهد |
| ۶. دکتر افشین فیاض موقر | دانشگاه مازندران |
| ۷. دکتر سیدمحمدتقی کامل میرمصطفائی | دانشگاه مازندران |
| ۸. دکتر مهرناز محمدپور | دانشگاه مازندران |
| ۹. دکتر سیدباقر میراشرفی | دانشگاه مازندران |
| ۱۰. دکتر سیدهادی ناصری | دانشگاه مازندران |
| ۱۱. دکتر مهران نقی زاده قمی | دانشگاه مازندران |

• تیم اجرایی سمینار

۱. دبیرخانه سمینار (کلیه امور مربوط به دبیرخانه و تهیه و تنظیم کتابچه راهنما و چکیده مقالات و مجموعه مقالات)

دکتر اکبر اصغرزاده نشلی، دکتر مهران نقی زاده قمی، دکتر سیدمحمدتقی کامل میرمصطفائی، علی سعادت نیک

۲. طراحان پوستر: جوانه راکی زاده، هانیه محمدی

۳. سایت سمینار: دکتر هادی جباری نوقابی

۴. پشتیبانی فنی سمینار: مهندس شهرام پورداد، مهندس حامد غلامپور، مهندس حسین هاشمی

فهرست مندرجات

- ۱ آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی براساس مشخصه‌سازی
معصومه اکبری و فاطمه زهرا قاسمی
- ۷ مروری بر روش‌های برآوردیابی در رگرسیون زمان شکست شتابیده
نرجس امیری و وحید فکور
- ۱۶ نوع II برآورد بیز و بیز تجربی توزیع لوجستیک ناقص تعمیم‌یافته با استفاده از داده‌های سانسور شده فزاینده
غزاله جرجانی، منوچهر بابانژاد و امید شجاعی
- ۲۳ مباحثی در توابع نرخ خطر U-شکل و کاربرد آن‌ها
مهین حبیبی
- ۳۲ مطالعه‌ای بر بهینه‌سازی در سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی
مطهره زعیم‌زاده، جعفر احمدی و بهاره خطیب آستانه
- ۴۱ ویژگی‌هایی از شاخص زنگا و ریسک در توزیع‌های بریده شده طول عمر
محبوبه کدخدای عرب، غلامرضا محتشمی برزادران و جعفر احمدی
- ۵۲ تابع نرخ خطر سیستم‌های سری و موازی تحت شرایط عملیاتی پویا
پویا مهابادی و مصطفی رزمخواه

آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی براساس مشخصه‌سازی

اکبری، م. و قاسمی، ف.^۱^۱ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران

چکیده: با توجه به کاربرد توزیع نمایی به عنوان ساده‌ترین و مهم‌ترین توزیع طول عمر در مباحث تحلیل بقا و نظریه قابلیت اعتماد، نتایج زیادی از آزمون‌های نیکویی برازش برای این توزیع توسط محققین ارائه شده است. در این مقاله، آماره‌های آزمون نیکویی برازش براساس مشخصه آن معرفی و توان چنین آزمون‌هایی با توان آزمون‌های نیکویی برازش معروف مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع نمایی، مشخصه‌سازی، آزمون نیکویی برازش.

۱ مقدمه

توزیع نمایی یکی از معروف‌ترین توزیع‌های طول عمر است که بدلیل سادگی تابع توزیع، دارای کاربردهای فراوان در نظریه قابلیت اعتماد است. در واقعیت داده‌های زیادی وجود دارد که از این توزیع پیروی می‌کنند. به عنوان مثال زمان لازم تا وقوع اولین زمین لرزه دارای توزیع نمایی است. هم‌چنین میزان طول عمر باتری ماشین و یا مدت زمان مکالمه تلفنی همگی دارای توزیع نمایی هستند.

گویم X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ است هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

و با نماد $X \sim Exp(\lambda)$ نشان داده می‌شود.

مشخصه یک توزیع، ویژگی‌هایی از یک توزیع است که فقط برای آن توزیع صدق می‌کند. بدلیل اهمیت توزیع نمایی و ارتباط آن با سایر توزیع‌ها نظیر توزیع‌های پارتو، کای-دو، گاما و ... تاکنون نتایج زیادی از مشخصه‌سازی این توزیع بدست آمده است. از محققین پیشگام در مشخصه‌سازی این توزیع می‌توان [۴]، [۶] و [۲] را نام برد. [۴] نشان داد که یک نمونه تصادفی به اندازه n دارای توزیع $Exp(\lambda)$ است اگر و فقط اگر

$$nX_{1:n} \stackrel{d}{=} X_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

از مشخصه‌سازی فوق در ادامه برای ساختن آزمون‌های نیکویی برازش استفاده شده است. آزمون‌های نیکویی برازش از جمله ابزارهایی هستند که به محقق کمک می‌کند میزان برازندگی و یا برازش توزیع یک مجموعه از داده‌های واقعی را به یک توزیع از قبل تعیین شده اندازه‌گیری کند. تا کنون آزمون‌های نمایی بودن متعددی توسط محققین ارائه شده است. به عنوان مثال [۵] آزمون نمایی بودن بر اساس اطلاع کولبک-لایبلر انجام دادند. [۸] مروری بر آزمون‌های نمایی بودن داشتند. [۱] آزمون نمایی بودن بر اساس نسبت درست‌نمایی انجام دادند و توان آزمون پیشنهادیشان را با توان تعداد زیادی از آزمون‌هایی که قبلاً معرفی شده بودند مقایسه کردند. اخیراً [۷] نشان داده است که آزمون‌های نیکویی برازش بر پایه مشخصه‌سازی توزیع تحت مطالعه، دارای کارایی بهتری نسبت به آزمون‌های نیکویی برازش دیگر است. بدین منظور در بخش دوم مقاله، آماره‌های آزمون نمایی بودن بر اساس مشخصه‌سازی [۴] معرفی و ناحیه بحرانی آن‌ها بررسی می‌شود و در بخش سوم مقایسه توانشان با دیگر آزمون‌های نیکویی برازش با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲ آزمون نمایی بودن

بر اساس مشخصه‌سازی دسو X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ است اگر و فقط اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$X_1 \stackrel{d}{=} 2 \min\{X_1, X_2\}. \quad (1)$$

فرض کنید ρ خانواده توزیع‌های نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ را نشان می‌دهد. اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع F باشد، هدف آزمون فرضیه $F \in \rho$: $F \in \rho$ در مقابل $H_1 : F \notin \rho$ می‌باشد. در دو بخش زیر دو آماره آزمون T_n و V_n معرفی می‌شود.

۱.۲ آماره آزمون T_n

آماره آزمون T_n برابر است با

$$T_n = \int_0^{\infty} (M_n(t) - F_n(t)) dF_n(t), \quad (2)$$

که $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq t)$ تابع توزیع تجربی نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n است که خود U -آماره تابع توزیع $F(\cdot)$ با هسته ناریب $I(X_i \leq t)$ است. همچنین $M_n(t)$ به صورت

$$M_n(t) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n I(2 \min(X_i, X_j) \leq t), \quad t > 0, \quad (3)$$

در نظر گرفته می‌شود. که در حقیقت U آماره‌ای از تابع توزیع متغیر تصادفی مبتنی بر مشخصه‌سازی (۱) می‌باشد.

با توجه به نامعلوم بودن توزیع دقیق T_n مقادیر بحرانی و توان آزمون مبتنی بر چنین آماره‌ای با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو محاسبه می‌شود. بدین منظور ابتدا فرم ساده شده T_n را به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^{\infty} (M_n(t) - F_n(t)) dF_n(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (M_n(x_{(j)}) - F_n(x_{(j)})) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < k} I(2 \min(X_i, X_k) \leq x_{(j)}) - \frac{j}{n} \right). \end{aligned}$$

کمیت $\sum_{i < k} I(2 \min(X_i, X_k) \leq x_{(j)})$ برابر است با رتبه $x_{(j)}$ در نمونه ادغام شده x_1, \dots, x_n و $2 \min(x_i, x_k)$, $1 \leq i < k \leq n$ (در ادامه با نماد r_j نشان داده شده است). منهای j . لذا T_n برابر می‌شود با

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\binom{n}{2}} (r_j - j) - \frac{j}{n} \right).$$

با در نظر گرفتن $N = \binom{n}{2}$ داریم

$$T_n = \frac{1}{2nN} \left(2 \sum_{j=1}^n r_j - (n+1)(n+N) \right).$$

مقادیر بزرگ T_n فرض صفر را رد می‌کند. مقادیر بحرانی این آزمون با استفاده از روش مونت کارلو در سه سطح معنی داری $\alpha = 0.1, 0.05, 0.1$ و به ازای حجم‌های مختلف $n = 10, 20, 30, 40$ محاسبه و در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر بحرانی آماره آزمون T_n

n	α		
	0.1	0.05	0.1
10	0.472	0.498	0.51
20	0.47	0.49	0.496
30	0.468	0.486	0.494
40	0.462	0.482	0.489

۲.۲ آماره آزمون V_n

آماره آزمون V_n مشابه آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنوف است و به صورت

$$V_n = \sup_{t \geq 0} |M_n(t) - F_n(t)|,$$

تعریف می‌شود. که $M_n(t)$ در (۳) تعریف شده است. برای محاسبه مقادیر بحرانی V_n در یک نمونه n تایی x_1, \dots, x_n می‌توان فرم ساده شده زیر را در نظر گرفت

$$\begin{aligned} V_n &= \max_{1 \leq i \leq n} |M_n(x_{(i)}) - F_n(x_{(i)})| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |M_n(x_{(i)}) - \frac{i}{n}|. \end{aligned}$$

کمیت $M_n(x_{(i)})$ نیز برابر است با $r_i - i$ که r_i قبلاً توضیح داده شده است. مقادیر بزرگ V_n فرض صفر را رد می‌کند و مقادیر بحرانی این آماره تحت فرضیه صفر به ازای $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ و $n = 10, 20, 30, 40$ با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه و در جدول زیر آمده است.

جدول ۲: مقادیر بحرانی آماره آزمون V_n

n	α		
	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱
۱۰	۰/۶	۰/۵	۰/۴
۲۰	۰/۴۰۵	۰/۳۳۲	۰/۳
۳۰	۰/۳۳۴	۰/۲۶۹	۰/۲۳۶
۴۰	۰/۲۸۵	۰/۲۳۳	۰/۲۰۸

۳ بررسی توان آزمون

در این بخش توان آزمون‌های معرفی شده در بخش قبل با آزمون‌های نیکویی برازش معروف نظیر آزمون کولموگروف-اسمیرنوف و آزمون کرامر-فون-میزز مقایسه می‌شود. تحت فرضیه صفر $F = F_0$ ، آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنوف (D_n) و آماره آزمون کرامر-فون-میزز (W_n^2) به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$D_n = \max\left\{0, \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F_0(x_{(i)})\right], \max_{1 \leq i \leq n} \left[F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right]\right\},$$

و

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2n} - F_0(x_{(i)})\right)^2.$$

برای مقایسه توان آزمون‌های مبتنی بر آماره‌های W_n^2 و D_n ، V_n ، T_n جهت آزمون نمایی بودن، توزیع‌های زیر به عنوان توزیع‌های مقابل در نظر گرفته شده است. قابل توجه است که این توزیع‌ها برگرفته از [۲] است.

۱- توزیع وایبل با چگالی $\theta x^{\theta-1} e^{-x^\theta}$ که با نماد $W(\theta)$ نشان داده شده است.

۲- توزیع گاما با چگالی $\frac{1}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x}$ که با نماد $\Gamma(\theta)$ نشان داده شده است.

۳- توزیع لگ نرمال با چگالی $\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\theta} e^{-\frac{(\log x)^\theta}{2\theta^2}}$ که با نماد $LN(\theta)$ نشان داده می‌شود.

۴- توزیع یکنواخت با چگالی $1, 0 \leq x \leq 1$ ، که با نماد U نشان داده می‌شود. علاوه بر این مقادیر بحرانی آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف و کرامر-فون-میزز در سطح $\alpha = 0.1$ با استفاده از روش مونت کارلو به ترتیب برابر با 0.266 و 0.344 بدست آمده است. در ادامه مقادیر توان آزمون‌ها با استفاده از روش مونت کارلو محاسبه و در جدول ۳ نشان داده شده است. نتایج این جدول

جدول ۳: مقادیر بحرانی آماره آزمون V_n

n	Alter.	α			
		T_n	V_n	D_n	W_n^*
۱۰	$W(0.8)$	۱	۱	۰.۶۸۳۴	۰.۹۷۱۲
	$W(1.4)$	۱	۱	۰.۹۳۹۷	۰.۹۹۹
	$\Gamma(0.4)$	۱	۰.۹۹۷۷	۰.۷۴۵۴	۰.۳۰۷
	$\Gamma(1)$	۱	۱	۰.۷۶۵۵	۰.۹۹۳۵
	$\Gamma(2)$	۱	۱	۱	۱
	$LN(0.8)$	۱	۱	۱	۱
	$LN(1.5)$	۱	۱	۱	۱
	U	۱	۰.۹۹۹۵	۰.۳۷۶۲	۰.۹۱۹

نشان می‌دهد که توان آزمون‌های T_n و V_n در همه موارد بیشتر از توان آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف و کرامر-فون-میزز است.

مراجع

- [1] Alizadeh, H.N., (2015), Testing exponentiality based on the likelihood ratio and power comparison, *AODS*, **2**, 195–204.
- [2] Alizadeh, H.N. and Arghami, N.R. (2011), Testing exponentiality based on characterizations of the exponential distribution, *J. Stat. Comput. Simul.*, **81**, 1641–1651.
- [3] Azlarov, T.A. and Volodin, N.A., (1986), *Characterization Problems Associated with the Exponential Distribution*, Springer-Verlag, New York.
- [4] Desu, M.M. (1971), A characterization of the exponential distribution by order statistics, *Ann. Math. Stat.* **42**, 837–838.
- [5] Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E., (1992), Testing exponentiality based on Kullback-Leibler information, *J. R. Stat. Soc.*, 739–748.
- [6] Galambos, J. and Kotz, S. (1978), *Characterizations of Probability Distributions*, Lecture Notes in Mathematics, No. 675, Springer-Verlag, New York.

- [7] Nikitin, Ya.Yu. (2017), Test based on characterizations, and their efficiencies: A survey, *ACUTM.*, **21**, 3–24.
- [8] Rogozhnikov, A.P. and Lemeshko, B.Y., (2012), *A review of tests for exponentiality*, 11th International Conference APEIE.

مروری بر روش‌های برآوردیابی در رگرسیون زمان شکست شتابیده

امیری، ن. و فکور، و.^۱^۱ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: بررسی تاثیر یک فاکتور به عنوان متغیر کمکی بر متغیر پاسخ از دیرباز مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. حال اگر متغیر پاسخ زمان بقا باشد مدل‌های آماری خاصی برای آن وجود دارند که یک نوع پر کاربرد آن رگرسیون زمان شکست شتابیده است. در این مقاله مرور مختصری بر روش‌های مختلف برآورد پارامتر رگرسیونی در مدل زمان شکست شتابیده تحت داده‌های سانسور شده خواهیم داشت. روش‌های مورد بررسی عبارتند از روش کمترین مربعات - روش رتبه‌ها - روش درست‌نمایی ماکسیمم با هسته و روش درست‌نمایی تجربی. در بین این روش‌ها، روش درست‌نمایی تجربی یکی از بهترین روش‌های برآورد محسوب می‌شود که با استفاده از شبیه‌سازی و داده‌ی واقعی بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: داده‌های سانسور شده، درست‌نمایی تجربی، رگرسیون زمان شکست شتابیده، معادله برآوردیابی.

۱ مقدمه

گاهی در بررسی‌های آماری با داده‌هایی مواجه می‌شویم که مدت زمان لازم تا رخداد یک پیشامد هستند. منظور از زمان می‌تواند سال، ماه، هفته و یا سن فرد در زمان رخداد پیشامد مورد نظر باشد. منظور از پیشامد می‌تواند مرگ، بروز بیماری، جذب یک دانش‌آموخته دانشگاه به بازار کار و یا به طور کلی هر تجربه تعریف شده‌ای باشد که فرد (مولفه) با آن مواجه می‌شود. به این گونه داده‌های بر حسب زمان، داده‌های بقا گفته می‌شود. در واقع داده‌های بقا، زمان تا وقوع پیشامد خاصی را اندازه‌گیری می‌کنند که متغیری تصادفی با مقادیر مثبت هستند و معمولاً دارای توزیع پیوسته فرض می‌شوند. این نوع از داده‌ها در رشته‌های مختلفی از جمله پزشکی^۱ کشاورزی و همه‌گیرشناسی پدیدار می‌شوند. یکی از ویژگی‌های مهم و بارز داده‌های بقا سانسور است. سانسور داده‌های بقا زمانی رخ می‌دهد که فرد (مولفه) پیشامد مورد نظر را تا پایان مطالعه تجربه نکرده باشد و زمان دقیق پیشامد مورد نظر مشخص نیست. در یک چنین حالتی زمان بقای فرد بیشتر از زمان مشاهده شده است.

نکته مهمی که در ارتباط با داده‌های بقا وجود دارد این است که چون این نوع داده‌ها اغلب در معرض سانسور قرار دارند نمی‌توان از مدل‌های رگرسیون خطی برای تحلیل آن‌ها استفاده کرد. زیرا برای داده‌های بقا فرضیات رگرسیون خطی برقرار نیست. بنابراین روش‌های رگرسیونی که برای مدل‌سازی داده‌های بقا بکار

^۱ امیری، ن. :: narjes.amiri@mail.um.ac.ir

گرفته می‌شوند بایستی متفاوت از رگرسیون خطی کلاسیک باشند. مدل رگرسیونی زمان شکست شتابیده^۱ (AFT) یکی از پرکاربردترین مدل‌های آماری است که برای تحلیل داده‌های بقا به کار می‌رود. رگرسیون AFT نخستین بار توسط پایک (۱۹۶۶) برای تحلیل داده‌های سرطان به کار برده شد اما نامی از این مدل در مقاله اش ذکر نشد. این مدل به دو دسته پارامتری و نیم-پارامتری تقسیم می‌شود که مدل پارامتری آن نخستین بار توسط کاکس (۱۹۷۲) و مدل نیم-پارامتری آن نخستین بار توسط کلبفلش و پرنیس (۱۹۸۰) معرفی شدند. در این مقاله مدل نیم-پارامتری AFT مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برآورد پارامتر رگرسیونی در این مدل تاکنون با استفاده از روش‌های کمترین مربعات، رتبه‌ها، درست‌نمایی ماکسیمم با هسته و درست‌نمایی تجربی مورد مطالعه و تحقیق قرار گرفته است. ما در این مقاله به مرور این روش‌ها می‌پردازیم و به اختصار آنها را شرح خواهیم داد.

۲ رگرسیون زمان شکست شتابیده

فرض کنید T یک متغیر تصادفی مثبت، β بردار پارامترهای رگرسیونی، Z بردار متغیر کمکی و ε خطا باشد در اینصورت مدل رگرسیون زمان شکست شتابیده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\log(T) = \beta^T Z + \varepsilon, \quad (1)$$

همانطوری که ملاحظه می‌شود در مدل AFT متغیرهای کمکی به صورت خطی روی لگاریتم متغیر پاسخ تاثیر می‌گذارند. در واقع این یکی از ویژگی‌های بارز مدل AFT محسوب می‌شود. در ادامه به مرور روش‌های برآوردیابی پارامتر β تحت داده‌های سانسور شده می‌پردازیم.

فرض کنید T_i طول عمر یک فرد (مولفه) باشد. تحت فرآیند سانسور راست، داده‌های مشاهده شده عبارت اند از (Y_i, δ_i, Z_i) که در آن $Y_i = \min(T_i, C_i)$ و $\delta_i = I(T_i \leq C_i)$ متغیر تصادفی سانسور است. فرض کنید

$$\log(T_i) = \beta^T Z_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

۱.۲ روش کمترین مربعات

در غیاب سانسور یک روش کلاسیک جهت برآورد پارامتر β روش کمترین مربعات خطا است که تحت مدل (۲) به فرم زیر خواهد بود.

$$\int \varepsilon^2 dF = \int (\log(T_i) - \beta^T Z_i)^2 dF, \quad (3)$$

که در آن F تابع توزیع متغیر تصادفی ε است.

^۱ Accelerated failure time

میلر (۱۹۷۶) با استفاده از مفهوم کمترین مربعات مسئله برآورد β در حضور داده‌های سانسور راست را مورد مطالعه قرار داد. او با جایگذاری برآوردگر کاپلان-مهیر^۲ در (۳) به معادله زیر رسید

$$\int \varepsilon^2 d\hat{F}_{KM}(\varepsilon) = \sum_{uc} \nu_i (\log(T_i) - \beta^T Z_i)^2, \quad (4)$$

که در آن ν_i وزنی است که برآوردگر کاپلان-مهیر به ε_i ها اختصاص می‌دهد و مجموع بالا روی داده‌های سانسور نشده است. معادله (۴) یک معادله ناپیوسته و برآوردگر حاصل ناسازگار است. وی با اصلاح معادله (۴) برآوردگری به دست آورد که تحت شرطی خاص سازگار و به طور مجانبی نرمال بود اما آن شرط در عمل همیشه برقرار نبود. از طرفی برآوردگری که میلر پیشنهاد داد تنها از داده‌های غیر سانسور استفاده می‌کرد و داده‌های سانسور شده را در نظر نمی‌گرفت. این باعث می‌شود برآوردگر حاصل کارا نباشد. برای غلبه بر این مشکل باکلی و جیمز [۱]

روش جدیدی پیشنهاد دادند. آنها دریافتند در حضور داده‌های سانسور شده تنها Y_i ها قابل مشاهده هستند لذا به جای استفاده از $\log(T_i)$ در فرمول (۳)، عبارت زیر را پیشنهاد داد:

$$\hat{Y}_i(\beta) = \delta_i \log(Y_i) + (1 - \delta_i) \left\{ \frac{\int_{\varepsilon_i(\beta)}^{\infty} u d\hat{F}_{KM}(u)}{1 - \hat{F}_{KM}(\varepsilon_i(\beta))} + \beta^T Z_i \right\}, \quad (5)$$

بنابراین برآوردگر باکلی-جیمز پارامتر β از حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) (\hat{Y}_i(\beta) - \beta^T Z_i) = 0. \quad (6)$$

مشکلی که در رابطه با معادله باکلی-جیمز وجود دارد این است که معادله ی مذکور اتابعی یکنوا و مشتق پذیر از β نیست لذا فرآیند ریشه‌یابی دشوار خواهد بود. از این رو باکلی و جیمز بدون اثبات تئوری و با شبیه سازی رفتار حدی $\hat{\beta}$ را بررسی کردند و نشان دادند دارای توزیع تقریبی نرمال است. برای حل این مشکل جین و همکاران [۲] کلاسی از معادلات برآوردیابی یکنوا معرفی کردند که معادله برآوردیابی (۶) را تقریب می‌زند و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$U(\beta, b) = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) \{ (\hat{Y}_i(b) - \bar{Y}_i(b)) - \beta^T (Z_i - \bar{Z}) \},$$

^۲Kaplan-Meier

که در آن

$$\bar{Y}(b) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i(b)$$

آنها نشان دادند $\hat{\beta}$ -ای که از حل معادله $U(\beta, b) = 0$ به دست می آید برآوردگری سازگار و به طور مجانبی نرمال است. همچنین برای محاسبه ماتریس واریانس-کواریانس این برآوردگر از روش بازنمونه‌گیری استفاده کردند. کول و همکاران (۱۹۸۱)، ریتاو و همکاران (۱۹۹۰) و لای و همکاران (۱۹۹۱) نیز از جمله کسانی بودند که از روش کمترین مربعات خطا برای برآورد پارامتر رگرسیونی نیز استفاده کردند.

۲.۲ روش رتبه

پرتیس (۱۹۷۸) با استفاده از مفهوم رتبه، برآوردگر رتبه را که بر پایه‌ی آماره لگاریتم-رتبه ساخته شد پیشنهاد داد. در حالت کلی تابع لگاریتم-رتبه^۱ وزنی برای β به صورت زیر است

$$U_{\pi}(\beta) = \sum_{i=1}^n \delta_i \pi(\beta, \varepsilon_i(\beta)) \left\{ Z_i - \frac{\sum_{j=1}^n Z_j I\{\varepsilon_j(\beta) \geq \varepsilon_i(\beta)\}}{\sum_{j=1}^n I\{\varepsilon_j(\beta) \geq \varepsilon_i(\beta)\}} \right\} \quad (۷)$$

که در آن π یک تابع وزنی است که می‌تواند بر حسب داده‌ها بیان شود و $I(\cdot)$ تابع نشانگر است. در صورتی که $\pi = 1$ آنگاه معادله (۷) آماره لگاریتم-رتبه است که توسط ماتل و همکاران (۱۹۷۷) معرفی شد و اگر $\pi = \sum_{j=1}^n I\{\varepsilon_j(\beta) \geq t\}$ آنگاه معادله حاصل آماره گهان (گهان، ۱۹۶۵) خواهد بود. تیسپاتیس (۱۹۹۰) لای و بینگ (۱۹۹۱b) و بینگ (۱۹۹۳) نشان دادند $\hat{\beta}$ -ای که از حل $U_{\pi}(\beta) = 0$ به دست می آید دارای توزیع مجانبی نرمال است. در اینجا نیز واریانس برآوردگر حاصل فرم پیچیده‌ای دارد و برآورد آن مستلزم برآورد تابع خطر است. مانند روش کمترین مربعات، $U_{\pi}(\beta)$ تابعی است که پیوسته و یکنوا نیست لذا پیدا کردن $\hat{\beta}$ کاری دشوار خواهد بود. جین و همکاران [۲] کلاسی از معادلات برآوردیابی یکنوا معرفی کردند که معادله (۷) را تقریب می‌زند. این معادله عبارت است از

$$\tilde{U}(\beta; \hat{\beta}) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{\beta}; \varepsilon_i(\hat{\beta})) \delta_i (Z_i - Z_j) I\{\varepsilon_i(\beta) \leq \varepsilon_j(\beta)\} \quad (۸)$$

که در آن

$\psi(b; x) = \pi(b; x) / \sum_{j=1}^n I\{\varepsilon_j(\beta) \geq t\}$ آنها نشان دادند برآوردگر حاصل از حل معادله $\tilde{U}(\beta; \hat{\beta}) = 0$ برآوردگری سازگار و به طور مجانبی نرمال است. همچنین برای محاسبه ماتریس واریانس-کواریانس این برآوردگر از روش بازنمونه‌گیری نیز استفاده کردند.

۳.۲ روش درستنمایی ماکسیمم با هسته

زنگ و لین [۵] با به کارگیری تابع درستنمایی و تابع هسته برآوردگری برای پارامترهای رگرسیونی ارائه دادند که سازگار و به طور مجانبی دارای توزیع نرمال است. در واقع برآورد β با ماکسیمم سازی تابع لگاریتم

^۱Log-rank

درست‌نمایی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 l_n(\beta) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \beta^T Z_i(Y_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i R_i(\beta) \\
 & + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \log \left\{ \frac{1}{n a_n} \sum_{j=1}^n \delta_j K \left(\frac{R_j(\beta) - R_i(\beta)}{a_n} \right) \right\} \\
 & - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \log \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{(R_j(\beta) - R_i(\beta))/a_n} K(s) ds \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

که در آن $K(\cdot)$ تابع هسته^۱ با پهنای نوار a_n و $R_i(\beta) = \log \int_0^{Y_i} \exp \beta^T Z(s) + \varepsilon ds$ است. بر خلاف بسیاری از روش‌ها که واریانس پیچیده‌ای دارند و نشان داد که ماتریس کواریانس به طور مجانبی برابر با باند کارا می‌باشد و به راحتی برآورد می‌شود.

۴.۲ روش درست‌نمایی تجربی

روش درست‌نمایی تجربی یک روش ناپارامتری در استنباط آماری است که به تحلیل‌گر این اجازه را می‌دهد تا بدون دانستن توزیع داده‌ها و از طریق روش‌های درست‌نمایی به استنباط آماری بپردازد. درست‌نمایی تجربی نخستین بار توسط توماس و گرانک مه‌یر (۱۹۷۵) به منظور ساخت فواصل اطمینان بهتری برای تابع بقای جامعه معرفی شد اما آنها نامی از این روش در مقاله ذکر نکردند. بر اساس ایده‌ی توماس و گرانک مه‌یر^۱ آون (۱۹۸۸) چارچوب کلی از درست‌نمایی تجربی را در استنباط ناپارامتری برای داده‌های کامل ارائه نمود. از آن زمان استفاده از درست‌نمایی تجربی در بسیاری از شاخه‌های آمار گسترش یافت. درست‌نمایی تجربی دارای ویژگی‌های آماری مطلوبی است که موجب برتری این روش نسبت به روش‌های موجود می‌شود. یکی از ویژگی‌های بارز درست‌نمایی تجربی ساخت فواصل اطمینان بدون نیاز به محاسبه و برآورد واریانس است. حال از آنجایی که در تحلیل بقا با داده‌های ناتمام مواجه هستیم و برآورد واریانس‌های نامعلوم با وجود این داده‌ها بسیار دشوار بوده و اغلب به صورت محدود در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند این روش می‌تواند راهکار بسیار مناسبی برای حل این مشکل باشد. بنابراین با استفاده از ابزار درست‌نمایی تجربی در حضور داده‌های سانسور شده ژو [۶] و ژو و لی [۷] در مدل AFT نتایجی برای پارامتر رگرسیونی β ارائه دادند. در حضور داده‌های سانسور شده درست‌نمایی تجربی به صورت زیر خواهد بود:

$$EL(\beta, F) = \prod_{i=1}^n p_i^{\delta_i} \left(1 - \sum_{\varepsilon_j(\beta) \leq \varepsilon_i(\beta)} p_j \right)^{1-\delta_i} \quad (10)$$

که در آن $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$

^۱Kernel function

۱.۴.۲ روش درستنمایی تجربی بر پایه‌ی معادله برآوردیابی رتبه

ژو با به کارگیری معادله برآوردیابی بر پایه رتبه (۷) محدودیتی به فرم زیر به دست آورد

$$\circ = \sum_{i=1}^n \delta_i p_i \pi(\varepsilon_i(\beta)) \frac{Z_i - \bar{Z}}{n w_i} \quad (11)$$

که در آن

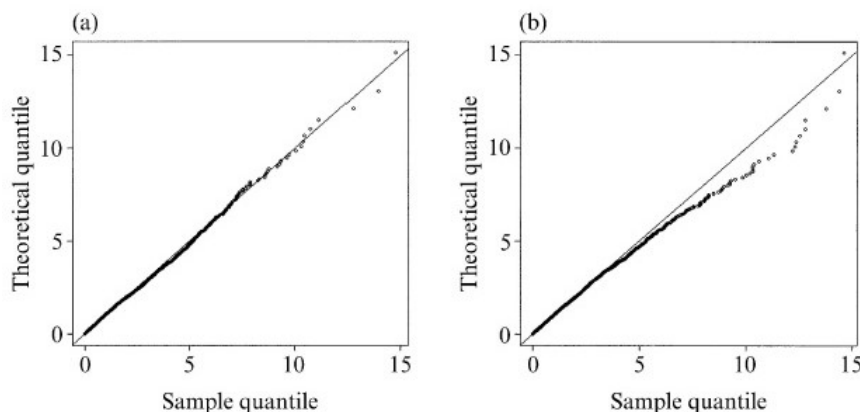
$$\bar{Z} = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j I\{\varepsilon_j(\beta) \geq \varepsilon_i(\beta)\}}{\sum_{j=1}^n I\{\varepsilon_j(\beta) \geq \varepsilon_i(\beta)\}},$$

و w_i اندازه جهش برآوردگر کاپلان-میر در نقطه $\varepsilon_i(b)$ است. وی نشان داد آماره نسبت درستنمایی تجربی تحت فرض $\beta = \beta_0$

$$-2 \log \frac{\sup_F EL(\beta_0, F)}{EL(\hat{\beta}, \hat{F}_{KM})}$$

برای اندازه نمونه‌های بزرگ به سمت توزیع کی دو با درجه آزادی یک میل می‌کند. قابل ذکر است صورت کسر تحت محدودیت (۱۱) ماکسیمم می‌شود. ژو با استفاده از شبیه سازی و تحلیل داده‌های واقعی به بررسی صحت روش پیشنهادی خود پرداخت.

• شبیه سازی وی با در نظر گرفتن مدل $\log(T) = 2x + \varepsilon$ و با رسم نمودار Q-Q مطابق شکل ۱ نشان داد توزیع حدی نسبت درستنمایی تجربی با آماره‌های گهان (شکل a) و لگاریتم-رتبه (شکل b) توزیع کای-دو با یک درجه آزادی است.



شکل ۱: نمودار Q-Q برای نسبت درستنمایی تجربی با محدودیت بر پایه رتبه

• داده‌ی واقعی ژو همچنین با استفاده از داده‌های پیوند قلب استنفورد (میلر و هلپرن، (۱۹۸۲))، مدل $\log(y) = \beta age + \varepsilon$ و آماره گهان، برآورد نقطه ای و فاصله ای پارامتر β را به دست آورد. برآوردگر رتبه ای نقطه‌ای پارامتر β برای این داده‌ها برابر است با ۰/۰۲۵۳-. علاوه بر آن فاصله اطمینان‌های ۹۵ درصد درستنمایی تجربی و والد به ترتیب (۰/۰۳۰۱، -۰/۰۴۴۶) و (۰/۰۰۴۴، -۰/۰۴۶۲۳-) هستند. همانطوری که مشاهده می‌شود هر دو فاصله اطمینان تقریباً با هم برابرند. قابل ذکر است برای

ساختن فاصله اطمینان والد نیاز به برآورد واریانس $\hat{\beta}$ است که با ۱۰۰۰۰ بار باز نمونه‌گیری به دست آمده است. در نتیجه مطالعات شبیه سازی و داده‌ی واقعی نشان می‌دهند روش پیشنهادی توسط ژو روش خوبی است زیرا نیاز به برآورد واریانس ندارد و لذا محاسبات در زمان کوتاهتری انجام می‌شوند.

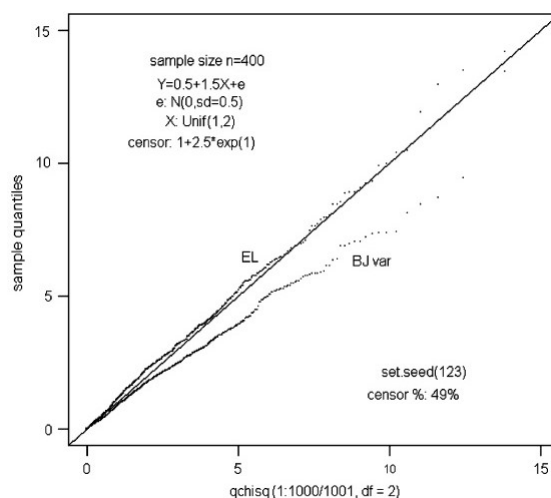
۲۰۴۰۲ روش درست‌نمایی تجربی بر پایه‌ی معادله برآوردیابی باکلی-جیمز

ژو و لی با استفاده از معادله برآوردیابی باکلی-جیمز (۶) محدودیتی به فرم زیر ساختند که تحت آن صورت کسر درست‌نمایی تجربی ماکسیمم می‌شود

$$\circ = \sum_{i=1}^n \delta_i p_i \varepsilon_i(b) \left\{ Z_i + \sum_{\delta_j = \circ, j: \varepsilon_j \leq \varepsilon_i} \frac{Z_j \Delta \hat{F}_{KM}(\varepsilon_i)}{1 - \hat{F}_{KM}(\varepsilon_j)} \right\}, \quad (12)$$

آنها ثابت کردند توزیع حدی لگاریتم نسبت درست‌نمایی تجربی برای n های بزرگ کی دو با یک درجه آزادی است و برای ارزیابی روش پیشنهادی خود به تحلیل نتایج شبیه سازی و داده‌های پیوند قلب استنفورد پرداختند.

• شبیه سازی آنها در ابتدا با در نظر گرفتن مدل $y = 0.5 + 1.5x + \varepsilon$ با انجام ۱۰۰۰ بار شبیه سازی مقدار آماره‌های نسبت درست‌نمایی تجربی (EL) و والد (BJvar) (که با استفاده از واریانس برآوردگر باکلی-جیمز به دست می‌آید) را محاسبه کردند و نمودار Q-Q را مطابق شکل ۲ ارائه دادند.

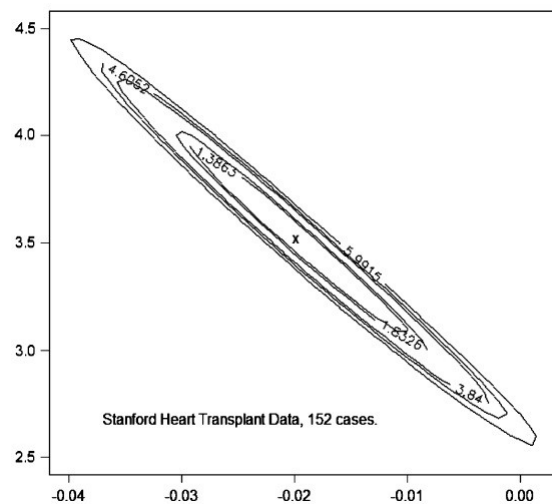


شکل ۲: نمودار Q-Q برای نسبت درست‌نمایی تجربی با استفاده از محدودیت بر پایه باکلی-جیمز

شکل ۲ نشان دهنده‌ی این است که برازش توزیع کای-دو برای آماره‌ی نسبت درست‌نمایی تجربی خوب بوده است و همچنین مقادیرهای آماره والد^۱ محاسبه شده کمتر از مقادیرهای کای-دو متناظرش است به طوری که حتی با افزایش اندازه نمونه این اختلاف کاهش نمی‌یابد. شکل ۲ در واقع برتری روش درست‌نمایی تجربی را نسبت به روش نرمال مجانبی به نمایش می‌گذارد. آنها همچنین روش پیشنهادی خود (ELBJ) را با روش درست‌نمایی تجربی بر پایه داده‌های مصنوعی^۲ (ELSD) (کین و جینگ

^۱Wald statistics

^۲Synthetic data



شکل ۳: کانتربلات مربوط به آماره نسبت درستنمایی تجربی

۲۰۰۱ و لی و ونگ (۲۰۰۳) تحت مدل $y = x + \varepsilon$ مقایسه کردند. نتایج شبیه سازی نشان دهنده‌ی این واقعیت بود که برای اندازه نمونه‌های بزرگ هر دو روش خوب عمل می‌کنند اما برای اندازه‌های نمونه‌های کوچک بخصوص با درصد سانسور بالا ELBJ بهتر از ELSD عمل می‌کند.

• داده‌ی واقعی ژو و لی مدل زیر را برای تحلیل داده‌های پیوند قلب استنفورد (میلر و هلپرن ۱۹۸۲) در نظر گرفتند

$$\log(T_i) = \beta_1 + \beta_2 \text{age} + \varepsilon_i,$$

تحت مدل بالا برآوردگر باکلی-جیمز $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ عبارت است از $(-0.19, 3.527)$ که در شکل ۳ با نماد X در وسط کانتورها قرار می‌گیرد. همچنین با رسم نمودار کانتور (شکل ۳) توانستند فاصله اطمینان درستنمایی تجربی برای β_1 و β_2 و رابطه بین آن دو را بررسی کنند. با مشاهده شکل ۳ به راحتی دیده می‌شود که فاصله اطمینان تجربی تقریبی در سطح ۹۵ درصد برای پارامتر β_1 و β_2 به ترتیب برابر است با $(2.75, 4.25)$ و $(-0.36, 0.026)$. در حالی که فاصله اطمینان نرمال مجانبی برای این دو پارامتر که با استفاده از واریانس برآوردگر باکلی-جیمز به دست می‌آید به ترتیب برابر است با $(3.48, 3.57)$ و $(-0.209, -0.189)$. همانطور که دیده می‌شود فاصله اطمینان درستنمایی تجربی پهن تر از فاصله اطمینان نرمال مجانبی است زیرا برای محاسبه فاصله اطمینان نرمال مجانبی از واریانس برآوردگر باکلی-جیمز استفاده کردند که هیچ توجیه نظری ندارد. علاوه بر آن، از آنجایی که نقاط کانتورها حالت نزولی (از بالا سمت چپ به پایین سمت راست) دارند برآوردگر $\hat{\beta}_1$ با برآوردگر $\hat{\beta}_2$ رابطه‌ی معکوس دارد.

۳ نتیجه‌گیری

مدل رگرسیونی زمان شکست شتابیده یکی از مدل‌های مفید و کاربردی برای تحلیل داده‌های بقا محسوب می‌شود که مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. در این مقاله به اختصار روش‌های برآورد پارامتر رگرسیونی تحت این مدل را معرفی کردیم. در بین این روش‌ها، روش درست‌نمایی تجربی یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای برآورد پارامتر در مدل رگرسیون زمان شکست شتابیده تحت داده‌های سانسور شده است. نتایج شبیه‌سازی و داده‌ی واقعی اهمیت این موضوع را می‌رسانند. از طرفی مسئله برآورد درست‌نمایی تجربی با استفاده از معادله‌ی برآوردیابی درست‌نمایی ماکسیمم با هسته (زنگ و لین، ۲۰۰۷) می‌تواند برای پژوهش‌های آتی در نظر گرفته شود.

مراجع

- [1] Buckley, J., & James, I. (1979). Linear regression with censored data. *Biometrika*, **66**(3), 429-436.
- [2] Jin, Z., Lin, D. Y., Wei, L. J., & Ying, Z. (2003). Rank-based inference for the accelerated failure time model. *Biometrika*, **90**(2), 341-353.
- [3] Jin, Z., Lin, D. Y., & Ying, Z. (2006). On least-squares regression with censored data. *Biometrika*, **93**(1), 147-161.
- [4] Ryabenskii V.S. and Tsynkov, S. (2007), *A theoretical introduction to numerical analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [5] Zeng, D., and Lin, DY. (2007). Efficient estimation for the accelerated failure time model, *Journal of the American Statistical Association*, **102**, 1387–1396.
- [6] Zhou, M. (2005). Empirical likelihood analysis of the rank estimator for the censored accelerated failure time model. *Biometrika*, **92**(2), 492-498.
- [7] Zhou, M., & Li, G. (2008). Empirical likelihood analysis of the Buckley–James estimator. *Journal of multivariate analysis*, **99**(4), 649-664.

برآورد بیز و بیز تجربی توزیع لجستیک ناقص تعمیم یافته با استفاده از داده‌های سانسور شده فزاینده نوع II

جرجانی، غ. ۱، بابائزاد، م. ۱ و شجاعی، ا. ۲

۱ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گلستان

۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان

چکیده: در این مقاله به برآورد بیز و بیز تجربی پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع لجستیک ناقص تعمیم یافته با استفاده از داده‌های سانسور شده فزاینده نوع II تحت زبان‌های متقارن و نامتقارن پرداخته شده است. زبان مربع خطا، برای تابع زبان متقارن و توابع زبان لاینکس و آنتروپی، به عنوان توابع زبان نامتقارن در نظر گرفته شده‌اند. در این مقاله، برآوردگرهای بیز پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع لجستیک ناقص تعمیم یافته محاسبه شد و از آنجایی که این برآوردگرها به پارامتر دیگری وابسته بودند، ابر پارامتر با استفاده از روش درست‌نمایی ماکزیمم برآورد شد و با جایگذاری برآوردگر ابر پارامتر در برآوردگرهای بیزی، برآوردگر بیز تجربی بدست آمد. برای مقایسه این دو روش برآوردی تحت زبان‌های مختلف، از روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع لجستیک ناقص تعمیم یافته، سانسور فزاینده نوع II، بیز تجربی، تابع قابلیت اعتماد، تابع زبان نامتقارن.

۱ مقدمه

یکی از توزیع‌های مهم در مطالعات طول عمر و قابلیت اعتماد توزیع لجستیک ناقص تعمیم یافته می‌باشد. تابع توزیع و تابع چگالی توزیع لجستیک ناقص تعمیم یافته به ترتیب عبارت است از [۱]

$$F(x|\beta) = 1 - \left[\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \right]^\beta, x > 0, \beta > 0, \quad (1)$$

$$f(x|\beta) = \frac{\beta(2e^{-x})^\beta}{(1+e^{-x})^{\beta+1}}, x > 0, \beta > 0. \quad (2)$$

همچنین تابع قابلیت اعتماد، $R(t)$ ، توزیع لوجستیک ناقص تعمیم یافته در زمان t برابر است با

$$R(t) = \left[\frac{2e^{-t}}{1+e^{-t}} \right]^\beta. \quad (3)$$

داده سانسور فزاینده نوع II تعمیمی از سانسور نوع II است و اگر آزمایشگر تصمیم بگیرد با مشاهده اولین شکست، R_1 واحد از واحدهای آزمایشی سالم باقیمانده را به تصادف از آزمایش خارج کند و در زمان دومین شکست، R_2 واحد از واحدهای آزمایشی سالم باقیمانده را به تصادف از آزمایش خارج کند و این کار را ادامه دهد تا در زمان m امین شکست همه واحدهای باقیمانده یعنی $R_m = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m$ را از آزمایش خارج کند، در اینصورت سانسور فزاینده از نوع II رخ می دهد. در این حالت زمان شکست واحدها متغیر تصادفی اند و مقادیر R_i ها ثابت های از قبل تعیین شده اند. بنابراین تابع درستنمایی بر اساس نمونه سانسور شده فوق عبارت است از

$$L(\beta) = C \prod_{i=1}^m f(x_i|\beta) [1 - F(x_i|\beta)]^{R_i}, \quad (4)$$

که در آن $C = n(n-1-R_1)\dots(n-R_1-R_{m-1}-m-1)$ می باشد. فرض کنید زمان شکست دارای توزیع لوجستیک ناقص تعمیم یافته با چگالی (۱) و $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دوم با طرح سانسور $R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ از توزیع لوجستیک باشد که به اختصار با X_1, \dots, X_m نشان می دهیم. تابع درستنمایی بر اساس نمونه سانسور شده فزاینده نوع دوم با جایگذاری رابطه (۱) و رابطه (۲) در رابطه (۴) به صورت زیر به دست می آید:

$$L(\beta) \propto \beta^m e^{\beta \left(\sum_{i=1}^m (R_i+1) \ln \left(\frac{2e^{-x_i}}{1+e^{-x_i}} \right) \right)}. \quad (5)$$

۲ برآورد بیز

با توجه به ساختار تابع درستنمایی توزیع پیشین در نظر گرفته شده برای پارامتر β ، چگالی پیشین مزدوج، دارای چگالی به فرم

$$\pi(\beta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \beta^{a-1} e^{-b\beta}, \quad a > 0, b > 0, \quad (6)$$

است. خانواده فوق، خانواده چگالی های گاما با پارامترهای a و b می باشد. با استفاده از تابع درستنمایی رابطه (۵) و چگالی پیشین (۶)، چگالی پسین β به صورت زیر به دست می آید:

$$\pi(\beta|x) = \frac{\left(b - \sum_{i=1}^m (R_i + 1) \ln \left(\frac{2e^{-x_i}}{1+e^{-x_i}} \right) \right)^{m+a} \beta^{m+a-1}}{\Gamma(m+a)} \quad (7)$$

$$\times e^{-\beta \left(b - \sum_{i=1}^m (R_i + 1) \ln \left(\frac{2e^{-x_i}}{1 + e^{-x_i}} \right) \right)}$$

۱.۲ برآوردگر بیز پارامتر β و تابع قابلیت اعتماد تحت زیان مربع خطا

اگر تابع زیان مربع خطا باشد یعنی

$$L(\hat{\beta}, \beta) = (\beta - \hat{\beta})^2,$$

آنگاه برآوردگر بیز پارامتر β که آن را با $\hat{\beta}_s$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\beta}_s = E(\beta | \underline{X}).$$

بنابراین برآوردگر بیز پارامتر β و تابع قابلیت اعتماد با توجه به رابطه (۷) به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\hat{\beta}_s = \frac{m + a}{b - T}, \quad (۸)$$

$$\hat{R}_s = \left(\frac{b - T}{b - T - T^*} \right)^{m+a}, \quad (۹)$$

که در آن $T = \sum_{i=1}^m (R_i + 1) \ln \left(\frac{2e^{-x_i}}{1 + e^{-x_i}} \right)$ و $T^* = \ln \left(\frac{2e^{-t}}{1 + e^{-t}} \right)$ می‌باشند.

۲.۲ برآوردگر بیز پارامتر β و تابع قابلیت اعتماد تحت زیان آنتروپی

تابع زیان آنتروپی برای β را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$L(\delta) = \delta - \ln \delta - 1,$$

که در آن $\delta = \frac{\hat{\beta}}{\beta}$ و $\hat{\beta}$ یک برآوردگر β است. برآوردگر بیز β تحت زیان آنتروپی با $\hat{\beta}_E$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{\beta}_E = \left(E \left(\frac{1}{\beta} | \underline{X} \right) \right)^{-1} = \frac{m + a - 1}{b - T}, \quad (۱۰)$$

و همچنین تابع قابلیت اعتماد بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{R}_E = \left(\frac{b - T}{b - T + T^*} \right)^{-(m+a)}. \quad (۱۱)$$

۳.۲ برآوردگر بیز پارامتر β و تابع قابلیت اعتماد تحت زیان خطی-نمایی

تابع زیان خطی-نمایی برای پارامتر β به صورت زیر تعریف می شود

$$L(\Delta) \propto \exp(c\Delta) - c\Delta - 1; k \neq 0,$$

که در آن $\Delta = \hat{\beta} - \beta$ است.

بنابراین برآوردگر بیز پارامتر β و تابع قابلیت اعتماد با توجه به رابطه (۷) و تحت زیان خطی-نمایی به صورت زیر به دست می آیند:

$$\hat{\beta}_L = -\frac{m+a}{c} \log \left(\frac{b-T}{c+b-T} \right), \quad (12)$$

$$\hat{R}_L = -\frac{m+a}{c} \ln \left(\frac{b-T}{b-T-cT^{**}} \right). \quad (13)$$

که در آن $T^{**} = \frac{2e^{-t}}{1+e^t}$ می باشد.

۳ برآورد بیز تجربی

با توجه به (۶) خانواده توزیع های پیشین مزدوج برای پارامتر β از خانواده ی توزیع های گاما با پارامترهای a معلوم و b نامعلوم می باشد.

همانطور که مشاهده می شود برآوردگرهای بیز بدست آمده در (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) وابسته به پارامتر b می باشند. وقتی که توزیع پیشین b نامعلوم باشد، می توانیم از روش بیز تجربی [۳] برای برآورد آن استفاده کنیم. با توجه به (۵) و (۶) چگالی حاشیه ای X به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(X|b) \propto \int_0^{+\infty} \beta^m e^{\beta T} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \beta^{a-1} e^{-b\beta} d\beta.$$

با فرض a معلوم و با توجه به $f(X|b)$ برآورد درستنمایی ماکزیم b (MLE) که آن را با \hat{b} نمایش می دهیم برابر است با

$$\hat{b} = \frac{a}{a-1} T.$$

حال با جایگذاری \hat{b} به جای b در برآوردگرهای بیز، برآوردگرهای بیز تجربی و قابلیت اعتماد را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\hat{\beta}_{ES} = \frac{(m+a)(a-1)}{T}, \quad (14)$$

$$\hat{\beta}_{EE} = \frac{(m+a-1)(a-1)}{T}, \quad (15)$$

$$\hat{\beta}_{EL} = -\frac{m+a}{c} \text{Log} \left[\frac{T}{c(a-1) + T^*} \right], \quad (16)$$

$$\hat{R}_{ES} = \left[\frac{T}{T - (a-1)T^*} \right]^{m+a}, \quad (17)$$

$$\hat{R}_{EE} = \left[\frac{T}{T + (a-1)T^*} \right]^{-(m+a)}, \quad (18)$$

$$\hat{R}_{EL} = -\frac{m+a}{c} \text{Log} \left[\frac{T}{T - c(a-1)T^{**}} \right]. \quad (19)$$

۴ شبیه‌سازی

برای اینکه برآوردهای بدست آمده را بتوان مقایسه نمود به نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع II از توزیع لجستیک نیاز داریم. برای اینکار با استفاده از مونت کارلو [۲] به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- ابتدا m عدد تصادفی مستقل از توزیع نمایی شبیه‌سازی می‌کنیم. این متغیرها را Z_1, \dots, Z_n نامگذاری می‌کنیم. برای مثال اینکار را می‌توان با بکار بردن تبدیل معکوس $Z_i = -\ln(1 - U_i)$ وقتی U_i متغیرهای تصادفی یکنواخت استاندارد هستند، انجام داد.

۲- برای $i = 1, 2, \dots, m$ قرار می‌دهیم

$$X_i = \frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n - R_1 - 1} + \frac{Z_3}{n - R_1 - R_2 - 2} + \dots + \frac{Z_i}{n - R_1 - R_2 - R_{i-1} - i + 1}.$$

نمونه‌های به دست آمده در این مرحله نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع II از توزیع نمایی می‌باشند.

۳- برای $i = 1, 2, \dots, m$ قرار می‌دهیم

$$Y_i = F^{-1}(1 - \exp(-X_i)) = \frac{X_i}{\beta} + \text{Log}\left(2 - \exp\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)\right),$$

که در آن $F^{-1}(\cdot)$ معکوس تابع توزیع، توزیع لجستیک می‌باشد. نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع II بدست آمده یعنی Y_1, \dots, Y_m از توزیع لجستیک با تابع توزیع $F(\cdot)$ می‌باشد.

۴- برآوردهای بیزی و بیز تجربی پارامتر β و تابع قابلیت اعتماد، $R(t)$ ، را با استفاده از رابطه‌های (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)، (۱۸)، (۱۹) محاسبه می‌کنیم.

۵- مراحل بالا را ۲۰۰۰ بار تکرار کرده و میانگین مربع خطا را در ۲۰۰۰ بار تکرار، به ازای مقادیر مختلف m و n و طرح‌های متفاوت سانسور بدست می‌آوریم. برای مقایسه برآوردها از میانگین مربع خطا که یک معیار برای مقایسه خطای برآوردها می‌باشد و به صورت

$$MSE = \frac{1}{2000} \sum_{i=1}^{2000} (\varphi_i - \hat{\varphi}_i)^2,$$

است، استفاده می کنیم که در آن $\hat{\varphi}$ یک برآوردگر φ است. هر چه قدر مقدار کمیت فوق کمتر باشد، برآوردگر بهتر است.

نتایج در جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول ۱: مقادیر MSE برآوردگرهای بیز و بیز تجربی و تابع قابلیت اعتماد توزیع لوجستیک

n	m	$R(R_1, R_2, \dots, R_m)$	$MSE(\beta)$		$MSE(R)$	
			Bayes	Emp Bayes	Bayes	Emp Bayes
			BS	BSemp	RS	RSemp
			BE	BEemp	RE	REemp
			BL	BLEmp	RL	RLemp
۲۰	۱۰	$R = (4, 4, 2, 0, \dots, 0)$	۰/۳۲۵۲	۰/۳۲۲۵	۰/۰۶۵۳	۰/۰۸۴۴
			۰/۲۹۰۲	۰/۳۰۹۲	۰/۰۷۶۶	۰/۰۹۵۶
			۰/۲۹۶۳	۰/۳۱۰۳	۰/۰۶۲۶	۰/۰۶۱۵
۳۰	۲۰	$R = (5, 5, 0, \dots, 0)$	۰/۲۳۲۹	۰/۲۴۵۴	۰/۰۶۸۸	۰/۰۸۲۳
			۰/۲۲۰۹	۰/۲۵۶۱	۰/۰۷۰۴	۰/۰۸۱۵
			۰/۲۲۵۳	۰/۲۳۶۳	۰/۰۶۱۷	۰/۰۵۹۸
۴۰	۲۰	$R = (5, 5, 5, 5, 0, \dots, 0)$	۰/۲۲۶۲	۰/۲۳۹۰	۰/۰۵۰۹	۰/۰۶۴۵
			۰/۲۱۸۳	۰/۲۴۵۰	۰/۰۵۰۱	۰/۰۶۳۲
			۰/۲۲۰۰	۰/۲۳۶۵	۰/۰۴۹۸	۰/۰۵۶۹

۵ نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش بیزی و بیز تجربی به برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع لوجستیک با استفاده از داده‌های سانسور شده فزاینده نوع II پرداختیم. توجه ما معطوف به تابع زیان متقارن مربع خطا و زیان‌های نامتقارن خطی-نمایی و آنتروپی بود. با توجه به جدول ۱ می‌توان گفت در برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع لوجستیک با داده‌های سانسور شده فزاینده نوع II و پارامترهای پیشین $a = 0/5$ و $b = 1$ و معیار مقایسه میانگین مربع خطا (MSE) تابع زیان خطی-نمایی با $c = 0/1$ دارای کمترین MSE در مقایسه با سایر برآوردگرها می باشد. همچنین با افزایش تعداد نمونه ها همانطور که مشاهده می گردد میزان MSE برآوردگرها رو به کاهش است. در خصوص مقایسه برآوردگرهای بیز و بیز تجربی همانطور که انتظار می رفت MSE برآوردگرهای بیزی نسبت به برآوردگرهای بیز تجربی کوچکتر می باشند. همچنین با توجه به جدول ۱ میزان MSE بدست آمده از توابع زیان نامتقارن خطی-نمایی و آنتروپی، در مقایسه با تابع زیان متقارن، مربع خطا، کمتر می باشد لذا می توان گفت توابع زیان نامتقارن عملکرد بهتری نسبت به تابع زیان متقارن داشته اند. بنابراین می توان گفت در برآورد بیز پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع لوجستیک با داده های سانسور شده فزاینده نوع II تابع زیان نامتقارن (خطی-نمایی) عملکرد بهتری دارند.

مراجع

- [1] Arora S. H., Bihmani G. C. and Patel M. N. (2010), Some Results on Maximum Likelihood Estimators of Parameters of Generalized Half Logistic Distribution under Type-I Progressive Censoring with Changing Failure Rat, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, **5**(14), 685-698.
- [2] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*, Birkhauser Boston.
- [3] Shojaee, O., Azimi, R. and Babanezhad, M. (2011), Empirical Bayes estimators of parameter and reliability function for compound Rayleigh distribution under record data, *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **1**(1),12-15.

مباحثی در توابع نرخ خطر U - شکل و کاربرد آن‌ها

حبیبی، م.^۱

^۱ گروه آمار زیستی، دانشکده علوم پزشکی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده: در عصر حاضر، با توجه به اهمیت و کاربردهای ویژه‌ای که روش‌های قابلیت اعتماد پیدا کرده‌اند، بیان تعریف‌ها و معیارهای دقیق از این روش‌ها و مطالعه پیرامون ویژگی‌های آن‌ها ضرورت یافته است. دانستن شکل و نوع سالخورده‌گی و کارافتادگی یک سیستم و یا مؤلفه‌ای از یک سیستم از اهمیت خاصی برای طراحان سیستم یا مهندس نگهداری و تعمیرات برخوردار است. این اهمیت از آن جهت است که می‌توان با توجه به اطلاعات موجود عملکرد سیستم را پیش‌بینی کرده و از خرابی‌های ناگهانی جلوگیری به عمل آورد. لذا مطالعه مدل‌های مختلف سالخورده‌گی به ویژه مطالعه در رفتار نرخ خطر یک سیستم تحت الگوهای مختلف آماری می‌تواند برای طراحان و کاربران سیستم در جنبه‌های مختلف تکنولوژی مفید باشد. در این مطالعه به تعریف و بررسی توابع وانی شکل و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. هم‌چنین در مورد عمر مفید این توابع و اهمیت تخمین این دوره بحث می‌کنیم و در نهایت به معرفی یک توزیع پیوسته وانی شکل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: عمر مفید، توزیع‌های طول عمر، قابلیت اعتماد، تابع بقا.

۱ مقدمه

در بسیاری از موقعیت‌های طبیعی، با اشیائی (موجودات زنده یا کالاهای تولید شده) سروکار داریم که سه دوره متفاوت، دوره پر خطر آغازین، دوره مفید و دوره فرسایش را در عمر خود تجربه می‌کنند. قطعه‌ای را در نظر بگیرید که در ابتدای عمر در معرض مخاطره‌های زیادی است و با گذر از دوره‌ی پرخطر آغازین، به شرایط مطلوبی می‌رسد و پس از گذراندن یک دوره مفید طول عمر که خطر جدی آن را تهدید نمی‌کند، دوره فرسایش که در آن به تدریج فرسوده و مستهلک می‌شود، آغاز می‌شود. به صورت ساده‌تر، اگر معیار سالخورده‌گی را براساس تابع نرخ شکست تعریف کنیم آن‌گاه نرخ شکست در یک بازه ابتدایی عمر اکیداً نزولی، در یک بازه میانی تقریباً ثابت و در انتهای عمر اکیداً صعودی است. برای مثال، هنگامی که یک تولیدکننده اتومبیل محصولات خود را وارد بازار می‌کند، در ابتدای استفاده از اتومبیل‌ها، نرخ ازکارافتادگی آن‌ها بالاست و نیاز به آب‌بندی دارند. پس از دوران آب‌بندی نرخ شکست اتومبیل تقریباً ثابت بوده، و برای یک دوره نسبتاً طولانی اتومبیل بدون خرابی عمل می‌کند. آنگاه دوره ازکارافتادگی اتومبیل شروع می‌شود و نرخ شکست آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد. در قابلیت اعتماد آماری، چنین رفتاری توسط مدل‌های طول عمر با نرخ شکست U -

^۱حبیبی، م. : mahin.habibi@modares.ac.ir

شکل (وانی شکل) توصیف می‌شود. با بررسی و تحلیل متون قابلیت اعتماد می‌بینیم که بسیاری از داده‌های طول عمر دارای منحنی نرخ شکست وانی شکل هستند که این منحنی‌ها به طور وسیعی در قابلیت اعتماد مهندسی کاربرد دارند. در واقع منحنی‌های وانی شکل شامل سه قسمت هستند:

۱- خرابی‌های اولیه که نرخ شکست سیستم برای این دوره نزولی است، مانند اوایل از کارافتادگی، مرگ و میر نوزادان

۲- عمر مفید سیستم که در این دوره زمانی نرخ شکست تقریباً ثابت است و شکست به صورت تصادفی اتفاق می‌افتد.

۳- دوره از کارافتادگی سیستم که در این دوره نرخ شکست شروع به صعود می‌کند، مانند فرسودگی و کهنه شدن

خرابی‌هایی اولیه، به علت نقص تولید و یا نقایص تولد در مورد انسان آغاز می‌شود. شکست‌ها در دوره‌ی عمر مفید سیستم، شکست‌های احتمالی نامیده می‌شود. و در نهایت دوره فرسودگی، با افزایش زمان وقوع شکست به دلیل کهنه شدن آغاز می‌شود. توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست وانی شکل از اهمیت زیادی برخوردارند چون طول عمر فرآیندهای الکترونیکی، الکترومکانیک و مکانیک اغلب از این ویژگی برخوردارند. در تحلیل‌های بقا نیز طول عمر بشر از این الگو پیروی می‌کنند. تعاریف زیادی در رابطه با نرخ شکست وانی شکل وجود دارد که در این جا به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید F تابع توزیع پیوسته با تابع نرخ شکست $h(t)$ باشد. گوئیم F دارای نرخ شکست وانی شکل است. ($F \in BFR$)^۱ اگر t وجود داشته باشد به طوری که:

۱- برای هر $t < t_0$ ، $h(t)$ نزولی باشد.

۲- برای هر $t > t_0$ ، $h(t)$ صعودی باشد.

به عبارت دیگر، برای هر $t < t_0$ ؛ $h'(t) < 0$ و برای هر $t > t_0$ ؛ $h'(t) > 0$ باشد [۱].

تعریف زیر با استفاده از قابلیت اعتماد شرطی بیان شده است. فرض کنید T طول عمر یک قطعه باشد و بدانیم که طول عمر قطعه از t بیشتر است. قابلیت اعتماد شرطی T با شرط $T > t$ در زمان $X + t$ را با $R(x|t)$ نمایش می‌دهیم برابر است با

$$\begin{aligned} R(x|t) &= P(T > x + t | T > t) \\ &= \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{R(x + t)}{R(t)} \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱. گوئیم $F \in BFR$ اگر t_0 وجود داشته باشد به طوری که:

۱- به ازای $t_0 - t_0 \leq x \leq t_0$ ، $0 \leq t < t_0$ ؛ $R(x|t)$ اکیداً صعودی باشد،

۲- به ازای $x \geq 0$ ، $t_0 \leq t < \infty$ ؛ $R(x|t)$ اکیداً نزولی باشد [۲].

^۱Bathtub Shape

- تعریف ۳.۱. توزیع F یک توزیع طول عمر وانی شکل است اگر وجود داشته باشد $t \geq 0$ به طوری که:
- ۱- به ازای $0 \leq t < t_1$ ؛ $h(t)$ اکیداً نزولی باشد،
 - ۲- به ازای $t_1 \leq t \leq t_2$ ؛ $h(t)$ ثابت باشد،
 - ۳- به ازای $t \geq t_2$ ؛ $h(t)$ اکیداً صعودی باشد [۳].

۲ خواص BFR

زمانی که می‌گوییم F یک BFR است یعنی تابع نرخ شکست آن وانی شکل است به عبارتی $h(t) \in BFR$. در این بخش، برخی از خواص اساسی در محدوده تابع بقا و گشتاورهای یک متغیر تصادفی BFR را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱.۲. فرض کنید $F \in BFR$ ، آن‌گاه $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$ که G توزیع نمایی با میانگین $h(t_0)^{-1}$ است و t_0 نقطه‌ی تغییری است که $h(t)$ در آن مینیمم می‌شود.

نتیجه ۲.۲. اگر $F \in BFR$ ، آن‌گاه F دارای گشتاورهای متناهی است و $E(X^k) \leq \frac{\Gamma(k+1)}{h(t_0)^k}$ ، $k > 0$.

نتیجه ۳.۲. توزیع وانی شکل F با گشتاور k ام $E(X^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{h(t_0)^k}$ (حول صفر)، لزوماً دارای توزیع نمایی است.

نتیجه ۴.۲. پیچش یک توزیع از کلاس‌های وانی شکل لزوماً یک توزیع وانی شکل نیست. در واقع، کلاس گسترده‌تر BFR که شامل توزیع‌های با نرخ شکست یکنوا است نیز تحت عمل پیچش بسته نیست. به عنوان مثال فرض کنید:

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{4}(e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}), t \geq 0, \quad \bar{G}(t) = e^{-t}.$$

که به ترتیب توزیع‌هایی با نرخ شکست نزولی و ثابت هستند و حالت خاص نرخ شکست وانی شکل می‌باشد. تابع نرخ شکست پیچش $H = F * G$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= P(X + Y < t) = \int_0^t F_x(t-y)g_y(y)dy \\ &= \int_0^t [1 - \frac{1}{4}(e^{-(t-y)} + e^{-\frac{1}{2}(t-y)})]e^{-y}dy \\ &= 1 - (\frac{t}{4})e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) \\ &= e^{-t}(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\ = \frac{(t-1)e^{-t} + e^{-\frac{t}{r}}}{te^{-t} + 2e^{-\frac{t}{r}}}$$

که براساس آن، $h(0) = 0$ ، $h(1) = 0.5$ ، $h(2) = 0.5533$ ، $h(4) = 0.5533$ و زمانی که $h(t) \rightarrow \infty$ آن گاه $h(t) \rightarrow 0.5$ بنابراین $h(t)$ نمی‌تواند توزیع وانی شکل داشته باشد.

نتیجه ۵.۲. آمیختن توزیع‌های وانی شکل لزوماً BFR نیست. به عنوان مثال، توزیع عمر زیر را در نظر بگیرید

$$\bar{F}(x) = 0.5\{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)\},$$

که

$$\bar{F}_1(x) = e^{-x}, \quad x > 0, \\ \bar{F}_2(x) = 2e^{-2x}(x + 0.5), \quad x > 0,$$

واضح است که، F_1 و F_2 ، IFR هستند و بنابراین BFR هستند. $\phi(x) = -\log \bar{F}(x)$ را در نظر بگیرید. می‌بینیم که $\phi''(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$ است که

$$\psi_1(x) = -e^{-x}\{1 + e^{-x}(2x + 1)\}^{-2}$$

$$\psi_2(x) = -4e^{-x} + 2x - 3$$

توجه کنید که $\psi_1(x) < 0$ برای همه مقادیر $x > 0$. همچنین $\psi_2(0) < 0$ و $\psi_2(\infty) = \infty$ است و $\psi_2(x)$ یک تابع پیوسته صعودی است. بنابراین $t > 0$ وجود دارد به طوری که تابع $\phi(x)$ روی $(0, t)$ محدب، و روی بازه $[t, \infty)$ مقعر است. بنابراین F ، BFR نیست. در واقع، تابع F توزیع وارون وانی شکل دارد.

نتیجه ۶.۲. فرض کنید یک سیستم سری با دو جزء مستقل داریم که طول عمر هر جزء آن BFR با یک نقطه عطفی مشترک t_0 است. آن گاه طول عمر سیستم دارای توزیع BFR با یک نقطه عطفی t_0 می‌شود.

نتیجه ۷.۲. یک سیستم موازی با دو جزء مستقل BFR ، لزوماً توزیع BFR ندارد. به عنوان مثال، فرض کنید h_p تابع نرخ شکست ساختاری با اتصال موازی دو مؤلفه‌ی مستقل باشد که هر مؤلفه BFR با تابع بقا

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \leq \theta \\ \frac{1}{1+\theta} e^{(\frac{\theta}{r})} e^{-(\frac{x}{r})} & x > \theta \end{cases}$$

باشد که $\theta = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. آن‌گاه برای $x < \theta$

$$\begin{aligned} R_p(x) &= 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - R_i(x)) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{1+2x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

بنابراین h_p به صورت زیر بدست می‌آید

$$h_p(x) = \frac{2x}{(1+x)(1+2x)}$$

که نتیجه می‌دهد

$$h'_p(x) = \frac{2 - 4x^2}{(2x^2 + 3x + 1)^2}$$

که برای $x \in [0, \theta]$ ، h'_p مثبت، بنابراین $h_p(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین سیستم نمی‌تواند BFR باشد.

۳ عمر مفید در توابع نرخ خطر وانی شکل

همانطور که گفتیم در توابع وانی شکل، منحنی در ابتدا به شدت کاهش می‌یابد و سپس انحنای آن شروع به تغییر می‌کند و نسبتاً ثابت می‌شود و بعد دوباره شروع به تغییر می‌کند و در آخر به شدت افزایش می‌یابد. همانطور که مشاهده می‌شود عمر مفید فاصله‌ی بین دو نقطه تعریف می‌شود که انحنا به سرعت تغییر می‌کند. توجه داشته باشید که اگر انحنای تابع $h(t)$ در نقطه t به سرعت تغییر کند، نمی‌توانیم برای این تابع در این نقطه هیچ دایره‌ای با شعاع بی‌نهایت رسم کرد. از طرف دیگر، اگر t نقطه‌ای باشد که تابع در آن ثابت است آن‌گاه می‌توان یک دایره با شعاع بی‌نهایت در آن نقطه رسم کرد. با در نظر گرفتن این موضوع، برای به دست آوردن طول عمر مفید سیستم، برای هر نقطه $(t, h(t))$ روی تابع نرخ شکست $h(t)$ ، شعاع دایره‌ی مناسب را بدست می‌آوریم. سپس دو مقدار از t که شعاع آن‌ها به حداقل می‌رسد را بدست می‌آوریم. این نقاط را نقاط پایانی و فاصله بین آن‌ها را عمر مفید توزیع عمر با نرخ شکست $h(t)$ می‌نامیم. برای راحتی کار، با ماکزیمم کردن عکس شعاع کار می‌کنیم که آن را در آنالیز ریاضی انحنای تابع $h(t)$ می‌نامند. و آن را با k به عنوان تابعی از t تعریف می‌کنند. که به صورت زیر است:

$$k(t) = \frac{|h''(t)|}{(1 + (h'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

بنابراین با در نظر گرفتن مباحث بالا، ما به دنبال پیدا کردن دو نقطه هستیم که $k(t)$ در آن حداکثر می‌شود. که این دو نقطه $c_0 \leq c_1$ را نقاط محافظه‌کار عمر مفید (c_0, c_1) می‌نامیم.

تفسیرهای هندسی و شهودی از نقاط تغییر شکل انحنای $k(t)$ تعریف دیگری از عمر مفید را نشان می‌دهد. فرض کنید u_0 بزرگترین نقطه تغییر شکل k در سمت چپ c_0 و u_1 کوچکترین نقطه تغییر شکل $k(t)$ در سمت راست c_1 باشد، آنگاه از این دو نقطه (u_0, u_1) برای تعریف عمر مفید سیستم استفاده می‌کنیم.

$$(u_0, u_1) \text{ دوره مفید } \subseteq \text{ عمر مفید محافظه کارانه } (c_0, c_1)$$

بدین معنا که دوره‌ی مفید محافظه‌کار همیشه از عمر مفید سیستم کمتر است. این تمایز به ما اجازه می‌دهد تا مفهوم «وانی شکل رضایت‌بخش»^۱ را تعریف کنیم.

تعریف ۰.۱.۳. می‌گوییم تابع نرخ شکست وانی شکل رضایت‌بخش است اگر عمر مفید محافظه‌کارانه آن صفر نباشد یعنی $c_0 < c_1$ و وانی شکل رضایت نابخش^۲ است اگر عمر مفید محافظه‌کار آن صفر باشد یعنی $c_0 = c_1$. ([۴])

در این بخش، در مورد اهمیت تخمین عمر مفید و طول آن بحث می‌کنیم.

• اول اینکه دانستن دوره مفید اطلاعاتی مفیدی در مورد تخمین زمان بهینه آب-بندی می‌دهد. آب‌بندی به طور گسترده در مهندسی قابلیت اعتماد استفاده می‌شود تا اقلام ضعیف را قبل از ورود به بازار از بین ببرند. در این فرآیند مؤلفه‌ها به عنوان آزمایش برای یک دوره b^* ، که آن را دوره‌ی آب‌بندی می‌نامند، در یک آزمایش با حساسیت بالا قرار می‌گیرند. در این مدت مؤلفه‌های ضعیف از بین می‌روند و مؤلفه‌هایی که باقی می‌مانند با اطمینان خاطر برای استفاده به کار می‌روند. در فرآیند آب‌بندی، بعد از این که محصول از این دوره سالم بیرون می‌آید، مقدار بهینه b^* طوری تعیین می‌شود که مقیاس‌های قابلیت اعتماد آن مانند میانگین عمر باقی‌مانده $\mu(t)$ یا قابلیت اعتماد شرطی آن را ماکزیمم می‌کند و برخی از هزینه‌های تابع که از فرآیند آب‌بندی متحمل می‌شود و دیگر هزینه‌های تعمیر، جایگزینی یا گارانتی به حداقل می‌رسد.

در این مطالعه، فرض اصلی این است که تابع نرخ شکست وانی شکل است. همانطور که اشاره شد در مدل‌های وانی شکل تابع نرخ شکست $h(t)$ در دو نقطه t_1, t_2 تغییر می‌کند و در فاصله (t_1, t_2) ثابت است که به آن عمر مفید سیستم گفتیم. معمولاً فرض بر این است که نقاط t_1, t_2 مشخص هستند و بنابراین زمان بهینه آب‌بندی براساس این دو نقطه به دست می‌آید. برای مثال، اگر معیار آب‌بندی براساس تابع نرخ شکست به دست آید، باید b^* قبل از t_1 اتفاق بیفتد و اگر براساس میانگین عمر باقیمانده باشد b^* باید قبل از نقطه تغییر $\mu(t)$ اتفاق افتد.

• دومین کاربرد عمر مفید سیستم، در الگوهای نگهداری پیشگیرانه از جمله تعویض بلوکی و تعویض سنی است که در زیر آن‌ها را بیان می‌کنیم.

برخی از سیستم‌ها مانند هواپیما، راکتورهای هسته‌ای که در زندگی با آنها سروکار داریم، دارای این ویژگی هستند که شکست آن‌ها ممکن است سبب صدمات جبران ناپذیری شود. بنابراین، در صورت از کارافتادن برخی از قطعات چنین سیستم‌هایی، خسارات ناشی از آن بسیار سنگین خواهد بود. در چنین حالاتی، برای

^۱ Comfortable bathtub shape

^۲ Uncomfortable bathtub shape

نگهداری و تعمیر سیستم شیوه‌های گوناگونی اتخاذ می‌شود؛ به گونه‌ای که احتمال از کارافتادگی سیستم به حداقل برسد. یکی از مباحثی که در این بستر مطرح می‌شود، بحث نگهداری پیشگیرانه است. در نگهداری پیشگیرانه، یک سیستم پیش از آنکه دچار شکست شود، براساس شیوه‌ای معین تعویض شده یا مورد بررسی و تعمیر قرار می‌گیرد. بر همین اساس، در تعویض یا تعمیر قطعات پیش از خرابی شیوه‌هایی وجود دارد که در ادامه به دو روش متداول از این شیوه‌ها اشاره می‌کنیم. این دو روش به تعویض بلوکی و سنی معروف‌اند. فرض کنید در زمان $t = 0$ سیستم شروع به کار می‌کند. در تعویض بلوکی، سیستم یا در زمان شکست تعویض می‌شود یا در زمان‌های $T, 2T, 3T, \dots$ که در آن T یک مقدار از پیش تعیین شده است. در تعویض سنی، سیستم در زمان شکست و یا هنگامی که به سن T رسید تعویض می‌شود. فرض کنید T^* زمان تعویض سنی است. تحت هر دو فرآیند تعویض سنی و تعویض بلوکی، $b^* + T^*$ باید بعد از دومین نقطه تغییر t_2 از $h(t)$ اتفاق افتد. به عبارت دیگر طول عمر مفید معادل با زمان T^* است. بنابراین، T^* براساس $c_1 - c_0$ یا $u_1 - u_0$ و b^* براساس c_0 یا u_0 به دست می‌آید.

۴ توزیع پیوسته با نرخ شکست وانی شکل

بیشتر توزیع‌های وانی شکل دامنه‌ی نامحدودی دارند و فرض بر این است که طول عمر آن‌ها کران‌دار نیست. ولی چندین توزیع معرفی شده است که دامنه متناهی دارند و طول عمر آن‌ها نیز کران‌دار است. لای و همکاران [۵] توزیعی را با دامنه‌ی متناهی، که تابع نرخ شکست آن توسعه‌یافته تابع چگالی بتا است را معرفی می‌کنند که به فرم زیر است

$$h(t) = \lambda(t+p)^{\alpha-1}(q-t)^{\beta-1} \quad 0 \leq t \leq q. \quad (2)$$

که $0 \leq \alpha < 1$ ، $0 \leq \beta$ ، $0 \leq p$ و $q, \lambda > 0$.

این مدل ۵ پارامتر دارد: دو پارامتر مکان p و q ، دو پارامتر شکل α و β ، و یک پارامتر ثابت λ . در حالت خاص اگر $p = 0$ و $q = 1$ و λ ثابت نرمال‌ساز در نظر گرفته شود، توزیع نرخ شکست به فرم توزیع بتای استاندارد می‌شود. همانطور که می‌بینیم این توزیع پارامترهای زیادی دارد و به همین علت برازش دادن آن روی داده‌ها مشکل است. به همین منظور حالت خاصی از این مدل را در نظر می‌گیریم که علاوه بر کم بودن پارامترها، هنوز فرم وانی شکل بودن را دارد.

اگر $\alpha = \beta = 0$ آن‌گاه

$$h(t) = \frac{\lambda}{(t+p)(q-t)} = \frac{\lambda}{p+q} \left(\frac{1}{p+t} + \frac{1}{q-t} \right) \quad (3)$$

همانطور که می‌بینید معادله ۱۱ به صورت سیستم مخاطره رقابتی با دو جزء است، یکی با نرخ شکست نزولی و دیگری با نرخ شکست صعودی است.

برای $p > 0$ و $0 \leq t \leq q$ تابع نرخ شکست تجمعی به صورت زیر است

$$H(t) = \int_0^t h(x) dx = \frac{\lambda}{(p+q)} \log\left(\frac{p+t}{q-t}\right) - \frac{\lambda}{q+p} \log\left(\frac{p}{q}\right). \quad (4)$$

بنابراین تابع بقا به سادگی براساس رابطه ی $e^{-\int^t h(x)dx} = e^{-H(t)}$ بدست می آید

$$\bar{F}(t) = \left(\frac{1 - \frac{t}{q}}{1 + \frac{t}{p}} \right)^{\frac{\lambda}{q+p}}. \quad (5)$$

تابع چگالی برابر است با

$$f(t) = \bar{F}(t) \cdot h(t) = \left(\frac{1 - \frac{t}{q}}{1 + \frac{t}{p}} \right)^{\frac{\lambda}{q+p}} \left(\frac{\lambda}{(t+p)(q-t)} \right). \quad (6)$$

که می توان به صورت زیر نوشت

$$f(t) = \lambda \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{\lambda}{q+p}} (q-t)^{\frac{\lambda}{q+p}-1} (p+t)^{\frac{-\lambda}{(p+q)}-1}. \quad (7)$$

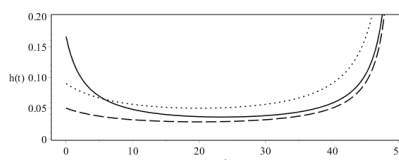
همانطور که ملاحظه می کنید تابع چگالی در $t = q$ تعریف نشده است مگر اینکه $\lambda \geq p + q$.

۱.۴ شکل تابع نرخ شکست

واضح است که تابع نرخ شکست در $t = 0$ متناهی و برابر

$$h(t) = \frac{\lambda}{pq}.$$

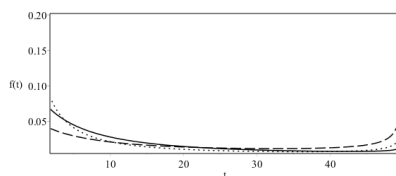
است و چون $(p+t)(q-t)$ در حالت $p < q$ یک چند جمله ای مقعر است، بنابراین $h(t)$ محدب با نقطه برگشت $t = \frac{q-p}{2}$ است. بنابراین، اگر $p < q$ آن گاه $h(t)$ وانی شکل و اگر $p > q$ نرخ شکست IFR است. شکل تابع نرخ شکست برای مقادیر مختلف λ, q, p در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: تابع نرخ شکست برای $q = 50$ و مقادیر $\lambda = 25, p = 3$ (خط) و $\lambda = 25, p = 3$ (خط تیره) و $\lambda = 45, p = 10$ (خط نقطه ای)

۲.۴ شکل تابع چگالی

شکل ۲ تابع چگالی برای مقادیر مختلف λ, q, p را نشان می دهد. توجه کنید که در $t = q$ تابع نرخ شکست همواره بی نهایت می شود ولی تابع چگالی بسته به اینکه $\lambda < q + p$ ممکن است بی نهایت یا صفر شود.



شکل ۲: تابع چگالی برای $q = 50$ و مقادیر $\lambda = 25, p = 3$ (خط) و $\lambda = 25, p = 3$ (خط تیره) و $\lambda = 45, p = 10$ (خط نقطه ای)

نتیجه گیری

در این مقاله، به مطالعه توابع وانی شکل و ویژگی هایی آن ها پرداختیم. همانطور که ملاحظه می شود اکثر کالاهای تولید شده دارای نرخ شکست وانی شکل هستند. میزان گارانتی این کالاها براساس دوره عمر مفید محاسبه می شود که در این دوره نرخ شکست کالا ثابت و احتمال خرابی آن خیلی کم است.

مراجع

- [1] Glaser, R. E. (1980). Bathtub and related failure rate characterizations, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 667-672.
- [2] Haupt, E., Schabe, H. (1997). The TTT transformation and a new bathtub distribution model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **60**, 229-240.
- [3] Mitra, M., Basu, S. K. (1995), Change point estimation in non-monotonic ageing models, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **47**, 483-491.
- [4] Bebbington, M., Lai, C.D., Zitikis, R. (2006). Useful periods for lifetime distributions with bathtub shaped hazard rate functions, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 245-251.
- [5] Lai, CD., Jones G. (2015), Beta hazard rate distribution and applications, *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, 44-50.

مطالعه‌ای بر بهینه‌سازی در سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی

زعیم‌زاده، م. ^۱، احمدی، ج. ^۱ و خطیب آستانه، ب. ^۲^۱ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد^۲ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور

چکیده: در این مقاله، مسئله بهینه‌سازی در سیستم‌های سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. متوسط طول عمر، تابع بقا و تابع هزینه به عنوان معیارهای بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. مسئله با جزئیات برای حالتی که مؤلفه‌ها دارای توزیع نمایی و تعداد آن‌ها دارای توزیع هندسی باشند، مطالعه شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع هندسی، سیستم سری، متوسط طول عمر، ترتیب تصادفی معمولی، توزیع نمایی.

۱ مقدمه

سیستمی را در نظر بگیرید که شامل تعدادی مؤلفه است و برای هدف معینی طراحی شده است. فرض کنید عملکرد سیستم، تابعی از عملکرد مؤلفه‌های آن باشد که هر مؤلفه در آن فعال و یا غیرفعال است. برای توصیف این وضعیت یک متغیر دومقداری S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) که نشان‌دهنده وضعیت مؤلفه i ام در یک زمان معین به ازای t داده شده است، به این صورت تعریف می‌شود که اگر مؤلفه i ام فعال باشد $S_i = 1$ در غیر این صورت $S_i = 0$ است. با توجه به تعریفی که برای متغیر S_i در نظر گرفتیم، فرض می‌کنیم سیستم در حالت فعال و یا غیرفعال است. برای تعیین وضعیت سیستم برحسب وضعیت مؤلفه‌ها، فرض می‌شود که پیوند سیستم با مؤلفه‌های آن، با تابع دومقداری $\varphi(\underline{S})$ ، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص می‌شود که در آن به $\underline{S} = (S_1, \dots, S_n)$ بردار وضعیت سیستم می‌گویند. بنابراین تابع ساختار سیستم به این صورت تعریف می‌شود که اگر سیستم فعال باشد تابع ساختار سیستم، یک است در غیر این صورت تابع ساختار سیستم صفر است. برای مطالعه بیشتر به [۱] رجوع کنید.

شکل تابعی تابع ساختار سیستم پس از آن که نوع ارتباط بین مؤلفه‌ها در سیستم معلوم شود، قابل تعیین خواهد بود.

یکی از ساده‌ترین نوع ساختار در بین سیستم‌های منسجم، سیستم سری است. به یک سیستم سری گفته می‌شود هرگاه فعال بودن آن مستلزم فعال بودن همه‌ی مؤلفه‌های آن باشد. از دیگر سیستم‌های متداول در

^۱ زعیم‌زاده، م. : mo.zaeemzadeh@mail.um.ac.ir

مهندسی قابلیت اعتماد، می‌توان از سیستم‌های با ساختار موازی نام برد که در این سیستم‌ها، فعال بودن سیستم مستلزم فعال بودن حداقل یکی از مؤلفه‌های آن است. به عبارت دیگر، سیستم زمانی از کار می‌افتد که همه‌ی مؤلفه‌های آن غیر فعال باشند. برای مطالعه بیشتر به [۱] رجوع کنید.

تعمیمی از سیستم‌های سری و موازی، سیستم‌های k از n هستند. سیستم‌های k از n معمولاً به دو شکل F سیستم‌های k از n و G سیستم‌های k از n تعریف می‌شوند. در F سیستم‌های k از n سیستم زمانی از کار می‌افتد که حداقل k مؤلفه از n مؤلفه‌ی آن از کار بیفتند و G سیستم‌های k از n سیستم زمانی کار می‌کند که حداقل k مؤلفه از n مؤلفه‌ی آن کار کند. در این مقاله F سیستم‌های k از n مدنظر است که در سیستم سری اگر $k = 1$ باشد سیستم از کار می‌افتد.

از ترتیب تصادفی معمولی در به دست آوردن نتایج در این مقاله استفاده می‌شود که اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند به طوری که برای هر $x \in (-\infty, \infty)$ داشته باشیم

$$P\{X > x\} \leq P\{Y > x\},$$

آنگاه می‌گویند X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی معمولی است و با نماد $X \leq_{st} Y$ نشان داده می‌شود. برای اطلاعات کامل درباره‌ی ترتیب‌های تصادفی به [۴] رجوع کنید. یادآوری می‌شود که اگر φ یک تابع صعودی (نزولی) باشد. آنگاه $X \leq_{st} Y$ با

$$E(\varphi(X)) \leq (\geq) E(\varphi(Y))$$

معادل است.

یکی از موضوعات مورد توجه در بحث قابلیت اعتماد، زمان از کار افتادن سیستم است. فرض کنید که طول عمر یک سیستم را با متغیر تصادفی T نشان دهیم که دارای تابع چگالی $f(t)$ و تابع بقا $\bar{F}(t)$ است. میانگین طول عمر سیستم، یا به عبارت دیگر میانگین زمان تا از کار افتادگی ($MTTF$) سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt,$$

به عنوان مثال به [۱] مراجعه شود.

اکنون یک سیستم سری که شامل تعداد تصادفی از مؤلفه‌ها است را در نظر بگیرید، اگر X_i نشان‌دهنده‌ی طول عمر مؤلفه i ام ($i \geq 1$) باشد، آنگاه طول عمر سیستم سری به صورت $\min(X_1, \dots, X_N)$ است، که در آن N نشان‌دهنده‌ی تعداد مؤلفه‌ها در سیستم است که متغیر تصادفی صحیح مثبت و مستقل از X_i ها، $i \geq 1$ می‌باشد.

توجه داریم که X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی طول عمر هستند. چون تعداد مؤلفه‌ها نامعلوم است بنابراین تعیین تعداد بهینه‌ی مؤلفه‌ها دارای اهمیت است. در بحث قابلیت اعتماد سیستم‌ها، تعداد مؤلفه‌های سیستم یکی از موضوعاتی است که مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است. در سیستم‌های موازی تعداد بهینه مؤلفه‌ها توسط محققین زیادی از جمله [۲] و [۳] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است، در این سیستم‌ها زمانی که تعداد مؤلفه‌ها تصادفی است، تعداد بهینه مؤلفه‌ها را با مینیمم کردن تابع نرخ هزینه

مورد انتظار می‌توان محاسبه نمود، برای مطالعه بیشتر می‌توانید به [۲] و [۳] رجوع کنید. در این مقاله فرض می‌کنیم که یک سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی داریم که طول عمر سیستم $\min(X_1, \dots, X_N)$ است.

هدف مسئله در این مقاله تعیین تعداد بهینه مؤلفه‌ها است، برای این منظور باید معیارهای بهینگی مناسبی تعریف شود. این معیار می‌تواند براساس تابع هزینه، متوسط طول عمر، تابع بقای سیستم و زمان کل تحت آزمایش بودن مؤلفه بیان شود، که در ادامه به مطالعه برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

در بخش ۲ برای سیستم‌های سری وقتی تعداد مؤلفه‌ها تصادفی است و توزیع تعداد مؤلفه‌ها متعلق به کلاس سری‌های توانی از توزیع‌ها می‌باشد، تابع توزیع طول عمر سیستم، تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم و متوسط طول عمر (میانگین زمان تا از کار افتادگی) سیستم را محاسبه می‌کنیم. بخش ۳ شامل مطالعه کلی مسئله بهینه‌سازی است. در بخش ۴ بهینه‌سازی براساس تابع هزینه و متوسط طول عمر را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۵ بهینه‌سازی بر اساس تابع بقا و تابع هزینه را بررسی می‌کنیم و در انتها یک خلاصه‌ای از جمع‌بندی ارائه شده است.

۲ سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی

فرض کنید متغیر تصادفی N دارای توزیع سری‌های توانی با تابع جرم احتمال

$$P\{N = n\} = \frac{a_n \theta^n}{b(\theta)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

باشد، به طوری که $a_n > 0$ و تنها به n بستگی دارد، $b(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n$ متناهی است. $b(\theta)$ یک چندجمله‌ای بر حسب θ است بنابراین نسبت به θ مشتق‌پذیر است. امید ریاضی متغیر تصادفی N با توجه به (۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E(N) = \theta \frac{b'(\theta)}{b(\theta)}. \quad (2)$$

فرض کنید مؤلفه‌های سیستم مستقل و هم توزیع باشند، در این صورت تابع توزیع طول عمر سیستم سری به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} F^*(t) &= P\{\min(X_1, \dots, X_N) \leq t\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\min(X_1, \dots, X_N) \leq t | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{F}^n(t)) P(N = n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{1}{b(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\theta \bar{F}(t))^n \\
 &= 1 - \frac{b(\theta \bar{F}(t))}{b(\theta)}, \quad (۳)
 \end{aligned}$$

که $F(t)$ تابع توزیع X_i ها ($i \geq 1$) است.

تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم سری، از رابطه (۳)، به دست می آید

$$f^*(t) = \frac{\theta f(t) b'(\theta \bar{F}(t))}{b(\theta)} = f(t) \frac{d}{d\bar{F}(t)} \phi_{\theta}(\bar{F}(t)), \quad (۴)$$

که در آن $\phi_{\theta}(z) = E(z^N) = \frac{b(z\theta)}{b(\theta)}$ تابع مولد احتمال N است. میانگین زمان تا از کار افتادگی سیستم سری از رابطه (۴) به صورت زیر به دست می آید

$$\mu_{\theta} = \int_0^{\infty} t f^*(t) dt = \int_0^{\infty} t f(t) \frac{d}{d\bar{F}(t)} \phi_{\theta}(\bar{F}(t)) dt = \int_0^1 \bar{F}^{-1}(u) \phi'_{\theta}(u) du. \quad (۵)$$

فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی و هم توزیع باشند و N_1 و N_2 دو متغیر تصادفی صحیح مثبت که مستقل از X_i ها می باشند.

در این صورت اگر $N_1 \leq_{st} N_2$ آنگاه $\min(X_1, \dots, X_{N_1}) \geq_{st} \min(X_1, \dots, X_{N_2})$ که در آن \leq_{st} نشاندهنده ی ترتیب تصادفی معمولی است. برای مطالعه بیشتر به [۵] رجوع کنید.

۳ بررسی مسئله بهینگی در سیستم سری

هدف به دست آوردن تعداد بهینه مؤلفه ها در سیستم سری است، چون در اینجا فرض شده است که تعداد مؤلفه ها متغیر تصادفی است، می توانیم $E(N)$ را در نظر بگیریم. برای این منظور باید معیارهایی مناسب برای بهینه سازی داشته باشیم، به عنوان مثال متوسط طول عمر (میانگین زمان تا از کار افتادگی) سیستم را محاسبه می کنیم و با استفاده از شرایطی که برای متوسط طول عمر در نظر می گیریم، بازه ای برای پارامتر توزیع تعداد مؤلفه ها به دست می آوریم، سپس اگر مقدار دقیق پارامتر را در آن بازه بدانیم با استفاده از رابطه ی (۲) تعداد بهینه مؤلفه ها را با جایگذاری پارامتر حاصل شده، می توانیم به دست آوریم. تابع هزینه را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$C_{\theta} = c_1 E(N) + c_2, \quad (۶)$$

که در آن c_1 هزینه خرید یک مؤلفه و c_2 نشاندهنده ی هزینه ی راه اندازی سیستم است که شامل تمام هزینه های ناشی از خرابی سیستم است.

فرض کنید متغیر تصادفی N دارای توزیع هندسی با تابع جرم احتمال $P\{N = n\} = (1 - \theta)\theta^{n-1}$ ، $(n = 1, 2, \dots)$ باشد و $F(t) = 1 - e^{-t}$ ، $t \geq 0$ است.

تابع بقا سیستم با توجه به رابطه‌ی (۳) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\bar{F}^*(t) = \frac{b(\theta e^{-t})}{b(\theta)} = \frac{(1-\theta)e^{-t}}{1-\theta e^{-t}}.$$

$\bar{F}^*(t)$ تابعی نزولی برحسب θ است زیرا

$$\frac{d}{d\theta} \bar{F}^*(t) = \frac{e^{-t}(e^{-t}-1)}{(1-\theta e^{-t})^2} \leq 0,$$

و می‌دانیم که $0 \leq \bar{F}^*(t) \leq 1$ است.

با توجه به تابع بقای محاسبه شده، میانگین زمان تا از کار افتادگی سیستم (متوسط طول عمر سیستم) را محاسبه می‌کنیم، داریم

$$\mu_\theta = \int_0^\infty \bar{F}^*(t) dt = (1-\theta) \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-\theta e^{-t}} dt = -\frac{(1-\theta) \ln(1-\theta)}{\theta}.$$

μ_θ تابعی اکیداً نزولی برحسب θ است زیرا

$$\frac{d}{d\theta} \mu_\theta = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\ln(1-\theta)}{\theta} + 1 \right) < 0.$$

(می‌دانیم $0 < \theta < 1$ ، $\ln(1-\theta) < -\theta$)

با توجه به این که $E(N) = \frac{1}{1-\theta}$ است تابع هزینه مورد انتظار $C_1(\theta) = \frac{c_1 E(N) + c_r}{\mu_\theta}$ را برای بررسی تابعی اکیداً نزولی برحسب θ است، اگر تابع نرخ هزینه مورد انتظار $C_1(\theta)$ یک تابع صعودی برحسب θ است، در نتیجه مسئله در این حالت جواب ندارد.

در بخش‌های بعدی شرایط وجود جواب مسئله را بررسی می‌کنیم.

۴ بهینه‌سازی براساس متوسط طول عمر و تابع هزینه

منطقی به نظر می‌رسد که جواب مسئله را با محدودیت‌های $\mu_\theta \geq \mu_0$ و $C_\theta \leq c_0$ بررسی کنیم. با توجه به بخش قبل چون μ_θ برحسب θ اکیداً نزولی است و از طرفی با توجه به شرط $\mu_\theta \geq \mu_0$ ، بنابراین جواب این نامساوی به صورت $\theta \in (0, \theta_{\mu_0}]$ است که در آن، $\theta_{\mu_0} = \sup\{\theta : \mu_\theta \geq \mu_0\}$ می‌باشد. چون C_θ برحسب θ اکیداً صعودی است و از طرفی با توجه به شرط $C_\theta \leq c_0$ بنابراین جواب این نامساوی به صورت $\theta \in (0, \theta_{c_0}]$ است که در آن $\theta_{c_0} = \sup\{\theta : C_\theta \leq c_0\}$ می‌باشد.

بنابراین با توجه به دو بازه‌ای که تحت شرایط ذکر شده به دست آوردیم و این که در این قسمت ما دو شرط را در نظر داریم و اشتراک این دو بازه، $\theta^* \in (0, \min(\theta_{\mu_0}, \theta_{c_0}))$ جواب مسئله است. در نتیجه اگر تعداد مؤلفه‌ها (N) دارای توزیع هندسی با پارامتر $\theta^* \in (0, \min(\theta_{\mu_0}, \theta_{c_0}))$ باشد در شرایط بیان شده صدق می‌کند. توجه کنید که اگر مقدار دقیق θ^* را بدانیم می‌توانیم با جایگذاری در رابطه‌ی (۲) تعداد بهینه

مؤلفه‌ها را به دست آوریم.

نکته ۱.۴. توجه کنید که چون μ_θ تابعی اکیداً نزولی بر حسب θ است باید مقدار μ_0 از مقدار μ_θ وقتی $\theta = 0$ است، کوچکتر باشد تا بتوانیم θ_{μ_0} را به دست آوریم. یعنی، $\mu_0 < \mu_{\theta=0}$ باید باشد تا بتوانیم بازه‌ای برای پارامتر توزیع N به دست آوریم، از طرفی چون تابع هزینه بر حسب θ اکیداً صعودی است باید مقدار c_0 از مقدار C_θ وقتی $\theta = 0$ است، بزرگتر باشد تا بتوانیم θ_{c_0} را به دست آوریم. یعنی، باید $C_{\theta=0} < c_0$ باشد تا بتوانیم بازه‌ای برای پارامتر توزیع تعداد مؤلفه‌ها به دست آوریم.

یادآوری می‌کنیم که اگر X_i ‌ها متغیرهای تصادفی باشند، ترتیب تصادفی معمولی زیر برقرار است

$$\min(X_1, \dots, X_N) \leq_{st} X_i, \quad i = 1, \dots, N$$

در نتیجه

$$\mu_\theta = E(\min(X_1, \dots, X_N)) \leq E(X_i), \quad i = 1, \dots, N$$

حال اگر X_i ‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین λ باشند، آنگاه $\mu_\theta \leq \lambda$ است. بنابراین با توجه به شرط $\mu_\theta \geq \mu_0$ و محاسبه شده در بخش ۳، نابرابری زیر را داریم

$$\left(-\frac{(1-\theta) \ln(1-\theta)}{\theta} \right) \geq \mu_0$$

که با توجه به نکته بالا، باید مقدار μ_0 از مقدار μ_θ وقتی $\theta = 0$ است، کوچکتر باشد تا بتوانیم θ_{μ_0} را به دست آوریم. یعنی، $\mu_0 < \mu_{\theta=0} = 1$ باید باشد تا بتوانیم بازه‌ای برای پارامتر توزیع N به دست آوریم. توجه کنید که X_i ‌ها دارای توزیع نمایی استاندارد هستند بنابراین $\mu_\theta \leq 1$ است.

حال با توجه به شرط $C_\theta \leq c_0$ و C_θ تعریف شده در بخش ۳ داریم

$$\left(\frac{c_1}{1-\theta} + c_2 \right) \leq c_0.$$

در نتیجه $\theta \leq 1 - \frac{c_1}{c_0 - c_2}$ که در آن $0 < \frac{c_1}{c_0 - c_2} < 1$ باید باشد. که با توجه به نکته بیان شده، باید $c_1 + c_2 < c_0$ تا جواب برای پارامتر مد نظر وجود داشته باشد.

فرض کنید مقدار $\left(1 - \frac{c_1}{c_0 - c_2}\right)$ ثابت و برابر با $0/5$ باشد با توجه به جدول ۱ همانطور که مشاهده می‌کنید با افزایش μ_0 ، طول بازه کوچکتر می‌شود. که این واضح است زیرا در این مثال همانطور که محاسبه کردیم متوسط طول عمر تابعی اکیداً نزولی بر حسب θ است و می‌خواستیم مقادیر آن بیشتر از μ_0 ای باشد، حال اگر مقدار μ_0 افزایش یابد مشخص است که مقادیر θ_{μ_0} کاهش می‌یابد و طول بازه $[\theta_{\mu_0}, 0)$ کوچکتر می‌شود بنابراین چون θ^* متعلق به اشتراک دوبازه‌ی $[\theta_{\mu_0}, 0)$ و $[\theta_{c_0}, 0)$ است و چون مقادیر θ_{c_0} را ثابت در نظر گرفته ایم بنابراین طول بازه‌ی $[\theta_{c_0}, 0)$ تغییر نخواهد کرد، در نتیجه با افزایش μ_0 طول بازه $\theta^* \in (\theta_{c_0}, \min(\theta_{\mu_0}, \theta_{c_0})]$ کاهش می‌یابد. توجه داریم وقتی مقدار $(\theta_{\mu_0} \geq \theta_{c_0})$ باشد طول بازه ثابت است و تغییری نمی‌کند.

حال فرض کنید مقدار μ_0 ثابت و برابر با $0/5$ باشد، با توجه به جدول ۲، همانطور که مشاهده می‌کنید با افزایش $\left(\frac{c_1}{c_0 - c_2}\right)$ مقادیر θ_{c_0} کاهش می‌یابد و در نتیجه طول بازه نیز کوچکتر می‌شود.

جدول ۱: مقادیر بهینه θ به ازای مقادیر μ_0 های مختلف

$\frac{c_1}{c_0 - c_T}$	μ_0	θ_{c_0}	θ_{μ_0}	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{\mu_0}))]$
۰/۵	۰/۱	۰/۵	۰/۹۷۳	(۰, ۰/۵۰۰]
۰/۵	۰/۳	۰/۵	۰/۸۷۳	(۰, ۰/۵۰۰]
۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۷۱۵	(۰, ۰/۵۰۰]
۰/۵	۰/۷	۰/۵	۰/۴۹۱	(۰, ۰/۴۹۱]
۰/۵	۰/۹	۰/۵	۰/۱۸۷	(۰, ۰/۱۸۷]

جدول ۲: مقادیر بهینه θ به ازای مقادیر $\frac{c_1}{c_0 - c_T}$ های مختلف

$\frac{c_1}{c_0 - c_T}$	μ_0	θ_{c_0}	θ_{μ_0}	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{\mu_0}))]$
۰/۱	۰/۵	۰/۹	۰/۷۱۵	(۰, ۰/۷۱۵]
۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۷۱۵	(۰, ۰/۷۰۰]
۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۷۱۵	(۰, ۰/۵۰۰]
۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۷۱۵	(۰, ۰/۳۰۰]
۰/۹	۰/۵	۰/۱	۰/۷۱۵	(۰, ۰/۱۰۰]

۵ بهینه‌سازی براساس تابع بقا و تابع هزینه

منطقی به نظر می‌رسد که جواب مسئله را با محدودیت‌های $F \leq \bar{F}^*(t)$ و $C_\theta \leq c_0$ نیز بررسی کنیم. در این بخش فقط کافی است برای تابع بقا شرط مورد نظر را مورد بررسی قرار دهیم و سپس با توجه به توضیحاتی که در بخش ۴ برای تابع هزینه ذکر شد برای این بخش با توجه به شرایط، بازه جواب را به دست آوریم.

چون تابع بقا برحسب θ نزولی است و از طرفی با توجه به شرط $\bar{F}^*(t) \geq F_0$ بنابراین جواب این نامساوی به صورت $\theta \in (0, \theta_{F_0}]$ است که در آن $\theta_{F_0} = \sup\{\theta : \bar{F}^*(t) \geq F_0\}$ می‌باشد. حال با توجه به دوبازه‌ی $\theta \in (0, \theta_{F_0}]$ و $\theta \in (0, \theta_{c_0}]$ و این که در این قسمت ما دو شرط را در نظر داریم بنابراین $\theta^* \in (0, \min(\theta_{F_0}, \theta_{c_0}))]$ جواب مسئله است. در نتیجه اگر تعداد مؤلفه‌ها دارای توزیع هندسی با پارامتر $\theta^* \in (0, \min(\theta_{F_0}, \theta_{c_0}))]$ باشد در شرایط این بخش صدق می‌کند، توجه کنید که اگر مقدار دقیق θ^* را بدانیم می‌توانیم با جایگذاری در رابطه‌ی (۲) تعداد بهینه مؤلفه‌ها را به دست آوریم.

نکته ۱۰۵. توجه داریم که چون تابع بقا برحسب θ نزولی است باید مقدار F_0 از مقدار $\bar{F}^*(t)$ وقتی $\theta = 0$ است، کوچکتر باشد تا بتوانیم θ_{F_0} را به دست آوریم. یعنی، $F_0 < \bar{F}_{\theta=0}^*(t)$ باید باشد تا بتوانیم بازه‌ی برای پارامتر توزیع N به دست آوریم، از طرفی چون تابع هزینه برحسب θ اکیداً صعودی است باید مقدار c_0 از مقدار $C_{\theta=0}$ وقتی $\theta = 0$ است، بزرگتر باشد تا بتوانیم θ_{c_0} را به دست آوریم. یعنی، باید $c_0 < C_{\theta=0}$ باشد تا بتوانیم بازه‌ی برای پارامتر توزیع تعداد مؤلفه‌ها به دست آوریم.

با توجه به شرط $\bar{F}^*(t) \geq F_0$ و $\bar{F}^*(t)$ محاسبه شده داریم

$$\frac{(1-\theta)e^{-t}}{1-\theta e^{-t}} \geq F_0,$$

که با توجه به نکته ذکر شده باید مقدار F_0 کوچکتر از $e^{-t} = \bar{F}_{\theta=0}^*(t)$ باشد تا بتوانیم بازه‌ای برای پارامتر توزیع N به دست آوریم.

با توجه به شرط $\bar{F}^*(t) \geq F_0$ ، $\theta \leq \frac{(F_0 e^t - 1)}{(F_0 - 1)}$ ، به دست می‌آید، توجه داریم که $0 < \theta < 1$ است بنابراین باید $0 < \theta \leq \frac{(F_0 e^t - 1)}{(F_0 - 1)} < 1$ باشد، از طرفی می‌دانیم $0 \leq F_0 - 1 \leq -1$ بنابراین باید $1 < e^t < \frac{1}{F_0}$ باشد.

فرض کنید مقدار $(1 - \frac{c_1}{c_0 - c_r})$ ثابت و برابر با $0/7$ و $e^t = 1/8$ باشد، با توجه به جدول ۳ همانطور که مشاهده می‌کنید، با افزایش F_0 طول بازه کوچکتر می‌شود که این واضح است زیرا در این مثال همانطور که محاسبه کردیم تابع بقا تابعی نزولی بر حسب θ است و می‌خواستیم مقادیر آن بیشتر از F_0 باشد حال اگر مقدار F_0 افزایش یابد مشخص است که مقادیر θ_{F_0} کاهش می‌یابد و طول بازه $(0, \theta_{F_0}]$ کوچکتر می‌شود بنابراین چون θ^* متعلق به اشتراک دوبازه‌ی $(0, \theta_{F_0}]$ و $(0, \theta_{c_0}]$ است و چون مقادیر θ_{c_0} را ثابت در نظر گرفته ایم بنابراین طول بازه‌ی $(0, \theta_{c_0}]$ تغییر نخواهد کرد، در نتیجه با افزایش F_0 طول بازه $\theta^* \in (0, \min(\theta_{F_0}, \theta_{c_0})]$ کاهش می‌یابد. توجه داریم وقتی مقدار $(\theta_{F_0} \geq \theta_{c_0})$ باشد طول بازه ثابت است و تغییری نمی‌کند. حال فرض کنید مقدار F_0 ثابت و برابر با $0/3$ باشد، با توجه به جدول ۴، همانطور که

جدول ۳: مقادیر بهینه θ به ازای مقادیر F_0 های مختلف

$\frac{c_1}{c_0 - c_r}$	F_0	θ_{c_0}	θ_{F_0}	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{F_0})]$
$0/3$	$0/1$	$0/7$	$0/91$	$(0, 0/70]$
$0/3$	$0/3$	$0/7$	$0/66$	$(0, 0/66]$
$0/3$	$0/5$	$0/7$	$0/20$	$(0, 0/20]$

مشاهده می‌کنید با افزایش $(\frac{c_1}{c_0 - c_r})$ مقادیر θ_{c_0} کاهش می‌یابد و در نتیجه طول بازه نیز کوچکتر می‌شود.

جدول ۴: مقادیر بهینه θ به ازای مقادیر $\frac{c_1}{c_0 - c_r}$ های مختلف

$\frac{c_1}{c_0 - c_r}$	F_0	θ_{c_0}	θ_{F_0}	$\theta^* \in (0, \min(\theta_{c_0}, \theta_{F_0})]$
$0/1$	$0/3$	$0/9$	$0/66$	$(0, 0/66]$
$0/3$	$0/3$	$0/7$	$0/66$	$(0, 0/66]$
$0/5$	$0/3$	$0/5$	$0/66$	$(0, 0/50]$

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک سیستم سری با تعداد مؤلفه‌های تصادفی در نظر گرفته شد و تابع توزیع طول عمر سیستم و میانگین زمان تا از کار افتادگی ($MTTF$) سیستم، زمانی که توزیع تعداد مؤلفه‌ها متعلق به کلاس سری‌های توانی از توزیع‌ها است، به دست آمده‌اند. فرض شده است که متغیر تصادفی تعداد مؤلفه‌های سیستم دارای

توزیع هندسی باشد و پارامتر آن تحت شرایط بهینه‌سازی بر مبنای متوسط طول عمر، تابع بقا و تابع هزینه به صورت نظری و عددی تعیین شده است. به عنوان آینده تحقیق تعداد بهینه مؤلفه‌ها وقتی که مؤلفه‌های سیستم وابسته و تعداد مؤلفه‌ها تصادفی و توزیع آن‌ها متعلق به کلاس سری‌های توانی از توزیع‌ها است می‌تواند مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد.

مراجع

- [۱] م. اسدی، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۲.
- [2] Eryilmaz, S. (2017), A note on optimization problems of a parallel system with a random number of units, *Int. J. of Reliab. Qual. and Safety Eng.* **24**, 1-9.
- [3] Nakagawa, T. (1984), Optimal number of units for a parallel system, *J. Appl. Probab.* **21**, 431-436.
- [4] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer Verlage, New York.
- [5] Shaked, M. and Wong, T. (1997), Stochastic comparisons of random minima and maxima, *J. Appl. Probab.* **34**, 420-425.

ویژگی‌هایی از شاخص زنگا و ریسک در توزیع‌های بریده شده طول عمر

کدخدای عرب، م. ^۱، محتشمی برزادران، غ. ^۱ و احمدی، ج. ^۱^۱ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: فرض کنید X متغیر تصادفی طول عمر باشد، در این مقاله سعی شده است ارتباط بین شاخص‌های معروف در مباحث نابرابری اقتصاد از جمله منحنی لورنتس و زنگا برای متغیر تصادفی بریده شده بر مبنای X مطالعه شود. همچنین ارتباط بین مفاهیم فوق و اندازه ریسک بررسی خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: میانگین طول عمر گذشته، شاخص زنگا، نابرابری اقتصادی، اندازه ریسک، شاخص نابرابری.

۱ مقدمه

بررسی ارتباط بین شاخص‌های نابرابری و معیارهای اندازه‌گیری قابلیت اعتماد امکان مطالعه این دو مفهوم را با استفاده از دیگری فراهم می‌کند. میانگین باقیمانده و گذشته عمر نیز بر حسب شاخص‌های نابرابری قابل بیان است. همچنین با شاخص‌هایی از بیمه و ریسک نیز کاملاً مرتبط است و گاه واقعاً یک مفهوم است که با نام‌های متفاوت در سایر شاخه‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد.

در این مقاله به واسطه کارهای انجام شده به دنبال روابط جدید بین این دو مبحث هستیم. در نوشته‌های چندرا و سینگپوروالا [۱] و جئورجی و کریسنزی [۲] مفاهیم اقتصادی در قابلیت اعتماد مورد توجه قرار گرفته‌اند. منحنی لورنتس یک منحنی فراوانی تجمعی است که امکان مقایسه یک متغیر خاص را با توزیع یکنواخت (که بیانگر برابری کامل است) فراهم می‌کند و کاربرد وسیعی در حوزه تحلیل توزیع درآمد دارد. این منحنی را لورنتس در سال ۱۹۰۵ معرفی کرد. در این منحنی محور عمودی درصد تجمعی درآمد و محور افقی درصد تجمعی خانوارها می‌باشد. با نزدیک شدن این منحنی به خط ۴۵ درجه نابرابری کاهش و با دورتر شدن از خط ۴۵ درجه نابرابری افزایش می‌یابد. فرض کنید X متغیر تصادفی (مانند درآمد) با تکیه‌گاه نامنفی و تابع توزیع $F(x)$ و میانگین متناهی $E(X) = \mu_F$ باشد، شاخص جینی که با دوبرابر مساحت بین تابع واقعی منحنی لورنتس

$$L_F(p) = \frac{1}{\mu_F} \int_0^p F^{-1}(t) dt$$

و خط برابری کامل تابع لورنتس $L_E(p) = p, 0 \leq p \leq 1$ تفسیر می‌شود عبارتست از

$$\begin{aligned} G_F &= 2 \int_0^1 (L_E(p) - L_F(p)) dp \\ &= 2E[L_E(\pi) - L_F(\pi)]. \end{aligned} \quad (1)$$

تابع بن فرونی نابرابری به شرح زیر است:

$$B_F(p) = 1 - \frac{L_F(p)}{L_E(p)} = 1 - \frac{L_F(p)}{p} \quad (2)$$

و به عنوان تابع جینی نابرابری هم شناخته می‌شود. تابع بن فرونی $B_F(p)$ علاوه بر نقش داشتن در مطالعات درآمد و فقر، کاربرد بسیاری در مطالعات قابلیت اعتماد، جامعه‌شناسی، بیمه و تحلیل بقا هم دارد.

۲ ویژگی‌هایی از ریسک در تبدیل‌های بریده شده

بسیاری از شاخص‌های نابرابری اقتصادی را می‌توان به عنوان اندازه انحراف بین توابع حقیقی و برابری لورنتس مشاهده کرد. توجه داشته باشید که تابع حقیقی لورنتس $L_F(p)$ یک اندازه نسبی است که p درصد درآمدهای پایین جامعه را با میانگین درآمد کل جامعه μ_F مقایسه می‌کند.

$$B_F(p) = 1 - \frac{AV@R_F(p)}{\mu_F} \quad (3)$$

که

$$AV@R_F(p) = \frac{1}{p} \int_0^p F^{-1}(t) dt \quad (4)$$

میانگین ارزش در معرض خطر X است. در واقع $AV@R_F(p)$ یک امید ریاضی شرطی و به صورت $E[X|X \leq F^{-1}(p)]$ تعریف می‌شود، که میانگین درآمد افرادی است که از خط فقر $F^{-1}(p)$ پایین‌تر هستند.

این شاخص مشابه میانگین گذشته طول عمر در مطالعات قابلیت اعتماد است در صورتی که اگر X طول عمر سیستمی باشد که قبل از زمان $t = F^{-1}(p)$ از کار افتاده است. لازم به یادآوری است که $E[X|X \leq F^{-1}(p)]$ به میانگین گذشته چندکی نیز معروف است.

شاخص G_F را با تابع بن فرونی $B_F(p)$ جدید به شرح ذیل تعریف می‌کنیم:

$$G_F = E\left[1 - \frac{AV@R_F(\pi)}{\mu_F}\right] \quad (5)$$

در اینجا $\pi \sim Beta(2, 1)$. اگر به جای ریسک اخیر از $\pi \sim Beta(1, 1)$ در سمت راست عبارت (۵) استفاده کنیم، امید ریاضی فوق به شاخص بن فرونی تبدیل خواهد شد.

$$B_F = \int_0^1 \left(1 - \frac{AV @ R_F(p)}{\mu_F}\right) dp \quad (6)$$

شاخص بن فرونی نسبت به شاخص جینی حساسیت بیشتری نسبت به سطوح پایین درآمدی دارد. این شاخص در مباحث قابلیت اعتماد خصوصاً میانگین باقیمانده عمر و میانگین گذشته عمر نیز کاربرد دارد. فرمول‌های (۵) و (۶) نشان می‌دهند که شاخص‌های بن فرونی و جینی به رده عمومی شاخص‌های زیر تعلق دارند:

$$A_F = E[v(AV @ R_F(\pi), \mu_F)] \quad (7)$$

در آن تابع $v(x, y)$ دارای امید ریاضی معلوم و متناهی است. در مورد شاخص‌های جینی و بن فرونی این تابع $v(x, y) = 1 - \frac{x}{y}$ است، که ارزش نسبی x بر حسب y محسوب می‌شود. همچنین می‌توانیم به جای تابع v از تابع k به شکل زیر استفاده کنیم:

$$v(x, y) = k(x/y) \quad (8)$$

در واقع تحت فرض طبیعی همگنی مثبت یعنی $v(\lambda x, \lambda y) = v(x, y)$ به ازای همه $\lambda > 0$ برقرار می‌باشد. قضیه کلاسیک اوپلر بیان می‌کند که عبارت بالا برای بعضی توابع $k(t)$ صدق می‌کند. شاخص‌های جینی و بن فرونی منجر به $k(t) = 1 - t$ می‌شوند.

با توجه به [۴] برای متغیر تصادفی نامنفی X که دارای تابع چگالی f می‌باشد، $X_{l,r}$ متغیر تصادفی بریده شده از دو طرف است که مقادیر در فاصله $[l, r]$ را می‌گیرد. این متغیر دارای تابع توزیع زیر است

$$F_{l,r}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < l \\ \frac{F(x) - F(l)}{F(r) - F(l)} & \text{if } l \leq x \leq r \\ 1 & \text{if } x > r \end{cases} \quad (9)$$

که بر اساس آن

$$F_{l,r}^{-1}(p) = F^{-1}(pF(r) + (1-p)F(l)) \quad (10)$$

می‌باشد. حال مفاهیم به دست آمده [۳] را برای توزیع‌های بریده شده بیان می‌کنیم. اولین مفهوم مورد بررسی میانگین ارزش در معرض خطر است که:

$$\begin{aligned} AV @ R_{F_{l,r}}(p) &= \frac{1}{p} \int_0^p F_{l,r}^{-1}(t) dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p F^{-1}(tF(r) + (1-t)F(l)) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{F(r) - F(l)} [AV@R_F(pF(r) + (1-p)F(l)) - AV@R_F(F(l))]. \quad (11)$$

حائز اهمیت است که هرگاه $r = F^{-1}(b)$ و $l = F^{-1}(a)$ در نظر گرفته شوند رابطه (۱۱) تبدیل به رابطه زیر خواهد شد:

$$AV@R_{F_{l,r}}(p) = \frac{1}{b-a} [AV@R_F(pb + (1-p)a) - AV@R_F(a)] \quad (12)$$

در ضمن در رابطه هرگاه $l = 0$ ($r \neq \infty$) باشد آنگاه:

$$AV@R_{F_{0,r}} = \frac{1}{F(r)} [AV@R_F(pF(r))] \quad (13)$$

و $r = \infty$ ($l \neq 0$) منجر به

$$AV@R_{F_{l,\infty}} = \frac{1}{1-F(l)} [AV@R_F(p + (1-p)F(l)) - AV@R_F(F(l))] \quad (14)$$

می شود.

و همینطور اگر $l = 0$ و $r = \infty$ همان رابطه به دست آمده در (۴) حاصل می شود:

$$AV@R_{F_{0,\infty}} = AV@R_F(p) \quad (15)$$

مثالی دیگر از توابع $k(t)$ از شاخص E-Gini به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} C_{F,\alpha} &= 2 \left(\int_0^1 (t - L_F(t))^\alpha dt \right)^{1/\alpha} \\ &= \frac{2}{(\alpha + 1)^{1/\alpha}} (E[v(AV@R_F(\pi)), \mu_F])^{1/\alpha}, \end{aligned} \quad (16)$$

تابع اندازه مرجع $v(x, y) = (1 - x/y)^\alpha$ است و $k(t) = (1 - t)^\alpha$ اگر $(\alpha + 1)^{1/\alpha}$ را جایگزین عدد ۲ در عبارت بالا قرار دهیم، سمت راست عبارت (۱۶) به شاخص زیر تبدیل می شود:

$$\tilde{C}_{F,\alpha} = (E[v(AV@R_F(\pi), \mu_F)])^{1/\alpha}$$

حال رابطه (۱۶) را تحت فرضیات توزیع بریده شده از دو طرف به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$C_{F_{l,r},\alpha} = 2 \left[\int_0^1 (t - L_F(tF(r) + (1-t)F(l)) + L_F(F(l)))^\alpha \right]^{1/\alpha} dt \quad (17)$$

با توجه به عبارات $C_{F,\alpha}$ و $\tilde{C}_{F,\alpha}$ مشاهده می کنیم که گاهی مفید است که شاخص A_F را به وسیله تابعی مانند $w(x)$ تبدیل کنیم. شاخص A_F را به وسیله مرجعی دلخواه مانند θ_F نشان می دهیم. به عبارت دیگر داریم:

$$B_F = w(E[v(AV@R_F(\pi), \theta_F)]).$$

$w(x)$ تابع نرمال‌ساز است که نقش اصلی آن برازش شاخص به بازه $[0, 1]$ است. مقدار صفر نشان دهنده برابری کامل و مقدار یک نشان دهنده نابرابری شدید است. حال به توسیع شاخص B_F رسیدیم:

$$C_F = w(E[v(AV@R_{F,u}(\pi), \theta_F)]) \quad (18)$$

در رابطه فوق به جای متغیر تصادفی X از تبدیل آن $u(X)$ استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال X درآمد و $u(X)$ مطلوبیت درآمد است.

این شاخص یک تعمیم کوچک از شاخص کاول است که برای محاسبه تعداد زیادی از شاخص‌های شناخته شده (به خصوص کلاس شاخص‌های آنتروپی عمومی) و شاخص‌های جدید دور از دسترس ارائه شده است.

۳ مفاهیمی از ریسک بر اساس تابع تغییر شکل

شاخص دونالدسون-ویمارک-کاکوانی که به عنوان شاخص S-Gini هم شناخته می‌شود برای در نظر گرفتن ترجیحات اجتماعی که شاخص جینی در نظر نمی‌گرفت به وجود آمده است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$DWK_{F,\alpha} = \alpha(\alpha - 1) \int_0^1 (1-p)^{\alpha-2} (p - L_F(p)) dp$$

شاخص $DWK_{F,\alpha}$ از طریق پارامتر $\alpha > 1$ ترجیحات اجتماعی مورد نظر را انعکاس می‌دهد. با استفاده از عبارات (۲) و (۴) می‌توان نوشت که

$$\begin{aligned} DWK_{F,\alpha} &= \int_0^1 \left(1 - \frac{L_F(p)}{p}\right) f_{Beta}(p|2, \alpha - 1) dp \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{AV@R_F(p)}{\mu_F}\right) f_{Beta}(p|2, \alpha - 1) dp \\ &= E[v(AV@R_F(\pi_\alpha), \mu_F)], \end{aligned} \quad (19)$$

که تابع مقدار نسبی $v(x, y) = 1 - x/y$ و ریسک $\pi_\alpha \sim Beta(2, \alpha - 1)$ هستند. برای معرفی یک شاخص جدید که از شاخص $DWK_{F,\alpha}$ دارای انعطاف بیشتری است ابتدا کلاس توابع مولد زیر را معرفی می‌کنیم:

$h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک تابع دوبار مشتق‌پذیر و محدب است ($h'' \geq 0$) به‌ازای همه مقادیر $(p \in (0, 1))$ که دارای شرایط کرانی $h(0) = 0$ و $h(1) = 1$ است و $h'(0) \neq 1$. π_h ریسکی است که چگالی آن توسط فرمول زیر نشان داده می‌شود:

$$f_\circ(p) = \frac{ph''(1-p)}{1-h'(0)} \quad (20)$$

به‌ازای همه مقادیر $p \in (0, 1)$ ، و $f_0(p) = 0$ برای سایر نقاط. با توجه به تابع مقدار نسبی $v(x, y) = 1 - x/y$ داریم:

$$\begin{aligned} DWK_{F,h} &= E[v(AV @ R_F(\pi_h), \mu_F)] \\ &= \frac{1}{1 - h'(0)} \left(1 - \frac{1}{\mu_F} \int_0^1 F^{-1}(p) h'(1-p) dp \right) \\ &= \frac{1}{1 - h'(0)} \left(1 - \frac{1}{\mu_F} \int_0^\infty h(1 - F(x)) dx \right). \end{aligned} \quad (21)$$

برای روشن شدن موضوع تابع $h(p) = p^\alpha$ را برای $\alpha > 1$ در نظر می‌گیریم، در این صورت ریسک π_h از چگالی

$\pi_\alpha \sim \sim Beta(2, \alpha - 1)$ پیروی می‌کند، یعنی $\alpha(\alpha - 1)p(p - 1)^{p-1}$ که همان توزیع ریسک π_α مشاهده شده است. در نتیجه شاخص DWK به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} DWK_{F,\alpha} &= 1 - \frac{\alpha}{\mu_F} \int_0^1 F^{-1}(p) (1-p)^{\alpha-1} dp \\ &= 1 - \frac{1}{\mu_F} \int_0^\infty (1 - F(x))^\alpha dx, \end{aligned} \quad (22)$$

شاخص $DWK_{F,h}$ بر اساس ریسک‌های تولید شده برای توابع محدب h است. حال اگر شاخص DWK را در توزیع‌های بریده شده از دو طرف بررسی کنیم خواهیم داشت:

$$DWK_{F_{l,r},h} = \frac{1}{1 - h'(0)} \left(1 - \frac{1}{\mu_{F_{l,r}}} \int_l^r F_{l,r}^{-1}(p) h'(1-p) dp \right) \quad (23)$$

با توجه به میانگین در توزیع‌های بریده شده

$$\begin{aligned} \mu_{l,r} &= \int_l^r t f_{l,r}(t) dt \\ &= \frac{\mu_F}{F(r) - F(l)} \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (24) در رابطه (23) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} DWK_{F_{l,r},h} &= \frac{1}{1 - h'(0)} \\ &\quad - \frac{F(r) - F(l)}{(1 - h'(0))\mu_F} \int_l^r F^{-1}(pF(r) + (1-p)F(l)) h'(1-p) dp \end{aligned}$$

یک شاخص مشابه ولی این بار بر اساس توابع مولد مقعر g اندازه ریسک (تغییر شکل) وانگ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_{F,g} = \int_0^\infty g(1 - F(x)) dx$$

$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک تابع تغییر شکل است نزولی است و دارای شرایط کرانی $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$ است. با توجه [۴] به تابع $g(p) = p^\alpha$ به ازای $\alpha \in (0, 1)$ ، اندازه ریسک وانگ $W_{F,g}$ به شکل تبدیل خطرات متناسب اندازه ریسک تحت شرایط توزیع‌های بریده شده از دو طرف نوشته می‌شود.

$$PHT_{F_{l,r},\alpha} = \int_l^r (1 - F_{l,r}(x))^\alpha dx$$

با مقایسه اندازه ریسک وانگ و شاخص DWK متوجه دو تفاوت بزرگ می‌شویم: نخست اینکه حال تابع موردعلاقه ما اکنون به صورت زیر است:

$$AVaR_F(p) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 F^{-1}(t) dt.$$

(زمانی که $p = 0$ باشد، $AVaR_F(p)$ همان میانگین μ_F خواهد بود.) تابع فوق در مفهوم توزیع‌های بریده شده از دو طرف بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} AVaR_{F_{l,r}}(p) &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 F^{-1}(tF(r) + (1-t)F(l)) dt \\ &= \frac{1}{(1-p)(F(r) - F(l))} \int_{pF(r) + (1-p)F(l)}^{F(r)} F^{-1}(y) dy \\ &= \frac{1}{F(r) - F(l)} \frac{1}{1-p} \int_{pF(r) + (1-p)F(l)}^1 F^{-1}(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{(1-p)(F(r) - F(l))} \int_{F(r)}^1 F^{-1}(y) dy \\ &= \frac{1}{F(r) - F(l)} [AVaR_F(pF(r) + (1-p)F(l)) - AVaR_F(F(r))] \end{aligned} \quad (25)$$

و دوم اینکه تابع g که توزیع موقعیت تصادفی تولید می‌کند، مقعر است. کلاس این توابع مولد به صورت زیر تعریف می‌شود:

توجه ۱.۳. $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر و مقعر است ($g'' \leq 0$) به ازای همه مقادیر $p \in (0, 1)$ که دارای شرایط کرانی $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$ است و $g'(1) \neq 1$.

تابعی مثل g چگالی $f(p)$ از ریسک π_g را که با فرمول زیر محاسبه می‌شود تولید می‌کند:

$$f_0(p) = \frac{-(1-p)g''(1-p)}{1-g'(1)} \quad (26)$$

به ازای همه مقادیر $p \in (0, 1)$ و $f_0(p) = 0$ برای سایر نقاط. با تابع ارزش نسبی $v(x, y) = y/x - 1$ داریم:

$$E[v(\mu_F, AVaR_F(\pi_g))] = \frac{1}{1-g'(1)} \left(\frac{1}{\mu_F} \int_0^1 F^{-1}(p)g'(1-p) dp - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{1 - g'(1)} \left(\frac{1}{\mu_F} \int_0^{\infty} g(1 - F(x))(dx - 1) \right) \quad (27)$$

اندازه ریسک وانگ $W_{F,g}$ می‌تواند در عبارات ارزش نسبی مورد انتظار $E[v(\mu_F AVaR_F(\pi_g))]$ به صورت زیر بیان شود:

$$W_{F,g} = \mu_F (E[v(\mu_F, AVaR_F(\pi_g))](1 - g'(1)) + 1) \quad (28)$$

وقتی تابع مولد $g(t) = t^\alpha$ به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ را داشته باشیم، ریسک π_g از تابع $Beta(1, \alpha)$ پیروی می‌کند. از عبارت (27) داریم:

$$E[v(\mu_F, AVaR_F(\pi_F))] = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{1}{\mu_F} \int_0^{\infty} (1 - F(x)^\alpha) dx - 1 \right) \quad (29)$$

و در آخر عبارت زیر را برای تبدیل خطرات متناسب اندازه ریسک تعریف می‌کنیم:

$$PHT_{F,\alpha} = \mu_F (E[(\mu_F AVaR_F(\pi_g))](1 - \alpha) + 1).$$

حال اندازه ریسک وانگ را در توزیع‌های بریده شده از دو طرف بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} W_{F_{l,r},g} &= \int_l^r g\left(1 - \frac{F(x) - F(l)}{F(r) - F(l)}\right) dx \\ &= \int_l^r g\left(\frac{F(r) - F(l) - F(x) + F(l)}{F(r) - F(l)}\right) dx \\ &= \int_l^r g\left(\frac{F(r) - F(x)}{F(r) - F(l)}\right) dx \end{aligned} \quad (30)$$

با در نظر گرفتن $r = F^{-1}(b)$ و $l = F^{-1}(a)$ در رابطه قبل خواهیم داشت:

$$W_{F_{l,r},g} = \int_{F^{-1}(a)}^{F^{-1}(b)} g\left(\frac{b - F(x)}{b - a}\right) dx. \quad (31)$$

با توجه به [5] و با پذیرش $AVaR_F(p)$ به عنوان مرجع شخصی θ_F و استفاده از تابع نرمال‌ساز $w(x) = x$ شاخص B_F به شاخص زنگا تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} Z_F &= \int_0^1 \left(1 - \frac{AV@R_F(p)}{AVaR_F(p)}\right) dp \\ &= E[v(AV@R_F(\pi), AVaR_F(\pi))] \end{aligned} \quad (32)$$

با تابع مقدار نسبی $v(x, y) = 1 - x/y$ و $\pi \sim Beta(1, 1)$ حال با استفاده از روابط (۱۱) و (۲۵) شاخص زنگا را در مفهوم توزیع‌های بریده شده بازنویسی می‌کنیم:

$$Z_{F_{l,r}} = \int_0^1 \left(1 - \frac{AV@R_{F_{l,r}}(pF(r) + (1-p)F(l)) - AV@R_{F_{l,r}}F(l)}{AVaR_{F_{l,r}}(pF(r) + (1-p)F(l)) - AVaR_{F_{l,r}}F(l)} \right) dp$$

اگر علاقه‌مندی ما اندازه‌گیری ریسک‌های بزرگ با توجه به موارد کوچک باشد، این مساله مشابه کاری خواهد شد که زنگا [۵] در زمینه نابرابری اقتصادی انجام داده بود. پس با دنبال کردن همان مسیر ولی اینبار با استفاده از تابع مقدار نسبی $v(x, y) = y/x - 1$ و ریسک عمومی π به اندازه نسبی ریسک خواهیم رسید

$$R_F = E[v(AV@R_F(\pi), AVaR_F(\pi))], \quad (۳۳)$$

که با توجه به تابع مطلوبیت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$R_F = ER_F(\pi) \quad (۳۴)$$

و نقش تابع مطلوبیت توسط تابع ریسک ایفا می‌شود:

$$R_F(p) = \frac{AVaR_F(p)}{AV@R_F(p)} - 1$$

در ادامه برای ساده سازی از نماد R_X به جای R_F استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۲.۳. عبارات زیر را داریم:

۱. اگر ریسک X ثابت باشد، یعنی $X = d$ برای مقدار ثابت $d > 0$ ، آنگاه $R_X = 0$.
۲. ضرب X در هر مقدار ثابت $d > 0$ اندازه نسبی ریسک را تغییر نمی‌دهد، یعنی $R_{dX} = R_X$.
۳. اضافه کردن هر مقدار ثابت $d > 0$ به ریسک X اندازه نسبی ریسک را کاهش می‌دهد، یعنی $R_{X+d} = R_X$.

گزاره ۳ می‌گوید که اضافه کردن هر مقدار ثابت مثبتی به ریسک، ریسک‌پذیری را کاهش می‌دهد و لزوم مرتب‌سازی اندازه‌های نسبی ریسک احساس می‌شود. یک نمونه از این مرتب‌سازی، ترتیب لورنتس است که یکی از پرکاربردترین ابزارها برای مقایسه پذیری توزیع‌های اقتصادی است. ویژگی سوم ما را به گزاره زیر می‌رساند:

گزاره ۱.۳.۳. اگر ریسک X و Y از ترتیب لورنتس پیروی کنند یعنی $X \leq_L Y$ ، آنگاه $R_X \leq R_Y$

این گزاره ما را به سمت اصل پیگو-دالتون سوق می‌دهد. در مفهوم پیگو-دالتون X نابرابری ریسک کمتری نسبت به Y دارد و با $X \leq_{PD} Y$ نشان داده می‌شود، اگر و تنها اگر $\mu_X = \mu_Y$ و $X \leq_L Y$ سمت راست عبارات (۲۲) و (۲۳) یکسانند، به جز تفاوت در مقدار نسبی‌شان یک اندازه نابرابری بسیار عمومی را ایجاد می‌کنند:

$$E[v(AV@R_F(\pi), AVaR_F(\pi^*))]$$

π^* و π می‌توانند وابسته یا مستقل، تباهیده یا غیرتباهیده باشند. بدیهی است که وقتی $\pi = \pi^*$ ما با توجه به تابع مقدار نسبی، شاخص نابرابری زنگا یا اندازه نسبی ریسک را خواهیم داشت. همچنین اگر $\pi^* = \pi$ آنگاه $AVaR_F(\pi^*) = \mu_F$ و بنابراین عبارت بالا به $E[AVaR_F(\pi), \mu_F]$ تبدیل می‌شود که همان شاخص بن‌فرونی است.

۴ نتیجه‌گیری

میانگین باقیمانده و گذشته عمر که از معیارهای مهم در قابلیت اعتماد هستند ارتباط حائز اهمیت با نابرابری‌های اقتصادی (از جمله منحنی لورنتس، منحنی بن‌فرونی، منحنی زنگا) و شاخص‌های مربوطه دارند. همین‌طور هر دو مبحث با مفاهیم ریسک مرتبط می‌باشند و گاه یک مفهوم در اشکال مختلف بیان می‌شود. در تمام عباراتی که در مبحث توزیع‌های بریده شده از دو طرف بیان کردیم نتایج به دست آمده در بحث قابلیت اعتماد بر اساس گذشته عمر و باقیمانده عمر قابل بیان هستند همچنین اگر l و r را به ترتیب با مقادیر صفر و بی‌نهایت جایگزین کنیم، همان رابطه‌هایی که در مبحث شاخص‌های اقتصادی و اندازه ریسک مشاهده کرده بودیم به دست خواهد آمد. مثال‌هایی که در این مقاله ذکر کردیم نمونه‌های خاصی از شاخص تازه معرفی شده ε_F هستند. با توجه به این نکته نتیجه می‌گیریم که در مثال‌های سراسر این مقاله ریسک‌های π^* و π به گونه‌ای بودند که یا یکسان هستند ($\pi = \pi^*$) و یا یکی از آنها تباهیده است ($\pi = 1$ یا $\pi^* = 0$). در این نوشتار ضمن تاکید بر شاخص‌های نابرابری اقتصادی و اندازه‌های نسبی ریسک، توجه به ارتباط با مسائل قابلیت اعتماد نیز معطوف شده است.

موارد زیر از جمله کارهایی هستند که در آینده می‌تواند مورد بررسی قرار بگیرد:

- ۱) معرفی شاخص‌های جدید از نابرابری اقتصادی با استفاده از مفهوم توزیع‌های طول عمر.
- ۲) یافتن ویژگی‌های جدید از توزیع‌های طول عمر با استفاده از شاخص‌های نابرابری اقتصادی.

مراجع

- [1] Chandra, M. and Singpurwalla N.D. (1981), Relationships between some nations which are common to reliability theory and economics, *Mathematics of Operations Research*. **5**(1), 113–121.
- [2] Giorgi G.M. and Crescenzi, M. (2001), A look at the Bonferroni inequality measure in a reliability framework, *Statistica anno LXI*. **4**, 571–583.
- [3] Greselin, F. and Zitikis, R. (2018), From the classical Gini index of income inequality to a new Zenga-type relative measure of risk: A modeller's perspective, *Econometrics*. **6**, 1–20.

- [4] Behdani, Z., Mohtashami Borzadran, G. and Sedeghpour Gildeh, B. (2020), Some properties of double truncated distributions and their application in view of income inequality, *Computational Statistics*. **35**, 359–378.
- [5] Zenga, M. (2007), Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means, *Statistica and Applicazioni*. **5**, 3–27.

تابع نرخ خطر سیستم‌های سری و موازی تحت شرایط عملیاتی پویا

مه‌آبادی، پ. ^۱ و رزمخواه، م. ^۱

^۱ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های وابسته در نظر گرفته می‌شوند و تحت شرایط محیطی پویا تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر برای این سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای مدل‌بندی سیستم‌ها از ساختار وابستگی ربعی مثبت و برای مقیاس زمان تصادفی از فرآیند پواسن مرکب استفاده می‌شود. در پایان با یک مثال واقعی، مطالب بیان شده تشریح می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: تابع قابلیت اعتماد، سیستم چند مولفه‌ای، فرآیند پواسن مرکب، مقیاس زمان تصادفی، وابستگی ربعی مثبت.

۱ مقدمه

سیستم‌های سری و موازی از جمله سیستم‌های منسجمی هستند که در عمل کاربرد زیادی دارند و بسته به نوع مساله و فرایندی که با آن مواجه هستیم یک سیستم می‌تواند شامل تعداد مولفه‌های متعددی باشد. برای سیستم چند مولفه‌ای، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌ها، قابلیت اعتماد سیستم است. از روش‌های معمول برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم، استفاده توأم از اطلاعات مربوط به قابلیت اعتماد مولفه‌ها و ساختار سیستم، برحسب وضعیت عملکرد مولفه‌ها (فعال یا غیرفعال)، می‌باشد. بر این اساس تحقیقات زیادی برای بررسی قابلیت اعتماد یک سیستم انجام شده است که بیشتر آنها مبتنی بر دو فرض است، اول اینکه شرایط عملیاتی سیستم نسبت به زمان پایاست و دیگر اینکه طول عمر مولفه‌های مستقل هستند. برای جزئیات بیشتر می‌توان به یالاتوی و همکاران (۲۰۰۵) و پنگ و همکاران (۲۰۱۸) مراجعه نمود.

هرچند، در نظر گرفتن این فرضیه‌ها باعث ساده‌تر شدن محاسبات قابلیت اعتماد سیستم می‌شود، اما در عمل موقعیت‌هایی وجود دارند که مولفه‌های یک سیستم به هم وابسته هستند. به عنوان مثال، سیستم ترمز خودرو را در نظر بگیرید. ترمز خودرو یکی از مهم‌ترین قسمت‌های وسیله نقلیه می‌باشد که سرعت خودرو را کنترل کرده و ایمنی را تضمین می‌کند. در این سیستم لنت‌های ترمز جلو و عقب به صورت سری کار می‌کنند؛ در هنگام ترمز گرفتن لنت‌های ترمز به دلیل فشار وارد شده دچار فرسودگی می‌شوند، در حالی که در شرایط عادی هیچ سایش قابل توجهی در لنت‌ها مشاهده نمی‌شود. ترمز گرفتن در طول زمان به صورت غیرقابل

^۱ مه‌آبادی، پ. :: pooya.mahabadi@mail.um.ac.ir

پیش‌بینی و بسته به شرایط محیطی از قبیل شرایط جاده، عادت رانندگی و میزان استفاده از ماشین تغییر می‌کند. همچنین هنگامی که لنت‌های ترمز در سیستم ترمز تحت شرایط عملیاتی کار می‌کنند فرسودگی آنها به یکدیگر مرتبط می‌شوند. از آنجایی که چرخ‌های محور جلو و عقب هر دو متعلق به یک خودرو هستند و تعداد ترمز گرفتن راننده خودرو باعث ساییدگی لنت‌های چرخ هر دو محور می‌شود، پس میزان ساییدگی لنت چرخ‌های دو محور به هم وابسته هستند. به عبارت دقیق‌تر وابستگی مثبت بین ساییدگی لنت‌های جلو و عقب وجود دارد، به این معنی که هر چه لنت‌های جلو بیشتر ساییده شود، لنت‌های عقب هم بیشتر ساییده خواهند شد، هر چند که میزان ساییدگی آنها یکسان نیست. بنابراین در چنین مواقعی لازم است سیستم‌هایی با مولفه‌های وابسته در نظر گرفته شود. غفلت از تاثیر شرایط محیطی متناسب با زمان و وابستگی احتمالی بین مولفه‌ها ممکن است به ارزیابی نادرستی در محاسبه قابلیت اعتماد سیستم منجر شود. کوئیت و انگلیش (۱۹۹۹) و کاتز و همکاران (۲۰۰۳) از جمله افرادی هستند که این موضوع را مورد مطالعه قرار داده‌اند. بنابراین لازم است مدل‌های مناسبی برای بررسی سیستم‌هایی با مولفه‌های وابسته در نظر گرفته شود. از طرفی، تحقیقاتی نیز در خصوص مدل‌های قابلیت اعتماد پویا برای سیستم‌های چند مولفه‌ای انجام شده است که از آن جمله می‌توان به ژنگ و لیانگ (۲۰۰۸)، دیستفانو و پولیافیتو (۲۰۰۹) و خاکزاد و همکاران (۲۰۱۲) اشاره نمود.

در این مقاله با توجه به همبستگی‌های بین طول عمر مولفه‌ها که به صورت پویا از محیط تاثیر مشترک می‌پذیرند، مدل قابلیت اعتماد چند مولفه‌ای را پیشنهاد می‌کنیم. هنگامی که شرایط عملیاتی تغییرناپذیر باشد، به عنوان مثال دمای محیط کار و رطوبت ثابت باشد، زمان کار معادل آن نیز صرفاً یک تابع مشخص و خطی از زمان تقویمی می‌شود، ولی اگر شرایط عملیاتی پویا باشد، آنگاه زمان کار معادل در طول زمان تقویمی تصادفی خواهد بود. در این مقاله زمان عملیاتی معادل حاصل از شرایط عملیاتی پویا را به عنوان یک فرآیند تصادفی مدل می‌کنیم که به آن مقیاس زمان تصادفی گفته می‌شود. فرایندهای پواسون مرکب، گاما و گوسی معکوس از جمله فرایندهایی هستند که بسته به نوع مساله می‌توانند در بررسی قابلیت اعتماد یک سیستم مورد استفاده قرار بگیرند. به عنوان مثال در سیستم ترمز خودرو که در آن لنت‌های ترمز با توجه به شوک‌های وارد شده دچار ساییدگی می‌شود، زمان کارکرد را به عنوان یک فرآیند پواسون مرکب مدل می‌کنیم که به آن مقیاس زمان پواسون مرکب گفته می‌شود. این فرآیند محور اصلی مطالب این مقاله در بررسی سیستم‌های سری و موازی است. از آنجایی که مولفه‌های موجود در یک سیستم تحت شرایط عملیاتی یکسان کار می‌کنند، منطقی است که فرض کنیم مولفه‌ها دارای مقیاس زمان تصادفی یکسان هستند. معمولاً مقیاس زمان تصادفی ارتباط بین طول عمر مولفه‌ها را نشان می‌دهد.

در بخش دوم این مقاله، فرآیند پواسون مرکب به عنوان مقیاس زمان تصادفی بررسی می‌شود. در بخش سوم، نمونه‌ای از ساختار وابستگی مولفه‌ها ارائه می‌شود. تابع نرخ خطر سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های وابسته در بخش چهارم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش پنجم، تئوری بیان شده در مقاله با استفاده از یک مثال از داده‌های واقعی تشریح می‌گردد.

۲ فرآیند پواسن مرکب

فرض کنید T_i طول عمر مولفه i ام در سیستم n مولفه‌ای باشد. همچنین فرض کنید تابع توزیع تجمعی طول عمر، توزیع نمایی با میانگین λ_i^{-1} به صورت زیر باشد.

$$F_{T_i}(t) = F_{T_i}(\mu(t)) = 1 - \exp(-\lambda_i \mu(t)), \quad (۱)$$

که λ_i نرخ شکست و $\mu(t)$ تابعی تبدیل شده از زمان تحت تاثیر شرایط محیطی است. برای مثال $\mu(t) = t^\beta$ برای سرعت دادن به زمان که برای مفاهیم سالخوردگی و فرسودگی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین، مقیاس زمانی $\mu(t) = 1 - \exp(-\beta t)$ برای کاهش دادن زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. توجه شود که مدل (۱) بر حسب تابعی مشخص از زمان در نظر گرفته شده است. اما مولفه‌های یک سیستم می‌توانند تحت شرایط محیطی پویا کار کنند. در چنین مواقعی، تابع $\mu(t)$ در (۱) را با فرایند تصادفی $\{H(t); t > 0\}$ جایگزین می‌کنیم. مقیاس زمان تصادفی برای همه مولفه‌ها مشترک است زیرا اثرات شرایط محیطی برای تمام مولفه‌ها یکسان می‌باشد. بنابراین تابع توزیع تجمعی طول عمر مولفه i ام در زمان t به شرط $H(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$F_{T_i}(t|H(t)) = 1 - \exp(-\lambda_i H(t)), \quad (۲)$$

به طوری که فرآیند $\{H(t); t > 0\}$ صعودی و $H(0) = 0$ به یاد بیاورید در مثال سیستم ترمز خودرو لنت‌های ترمز تحت تاثیر شوک‌های وارد شده دچار ساییدگی می‌شوند. در اینجا مقیاس زمان تصادفی را به عنوان یک فرآیند پواسون مرکب مدل می‌کنیم به اینگونه که:

$$H(t) = \sum_{\bar{H}(t)} \gamma = \gamma \bar{H}(t) \quad (۳)$$

که γ مقدار شوک وارد شده و $\{\bar{H}(t); t > 0\}$ فرآیند پواسون غیر همگن با تابع میانگین $\mu(t)$ می‌باشد که در زمان t ، $\bar{H}(t)$ دارای توزیع $Pois(\mu(t))$ با تابع جرم احتمال زیر است:

$$P(\bar{H}(t) = k) = \frac{\mu(t)^k \exp(-\mu(t))}{k!}$$

میانگین و واریانس $\bar{H}(t)$ برابر $\mu(t)$ می‌باشد. با جایگذاری (۳) در (۲) پارامتر $\lambda_i \gamma$ تولید می‌شود که برای جلوگیری از پارامتر اضافی مقدار γ برابر یک قرار می‌دهیم.

۳ وابستگی مولفه‌ها

در این بخش ساختار وابستگی ربعی را مورد توجه قرار می‌دهیم. برای این منظور ابتدا تعریف مربوطه را بیان و سپس نشان می‌دهیم در مدل مورد بررسی این نوع از وابستگی بین مولفه‌ها برقرار است.

تعریف ۱.۰.۳. فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی باشند، اگر

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq P(X_1 > x_1)P(X_2 > x_2)$$

آنگاه X_1 و X_2 دارای وابستگی ربعی مثبت هستند.

در قضیه زیر نشان می دهیم که طول عمر مولفه های سیستم مورد بررسی تحت مقیاس زمان پواسن مرکب، وابستگی ربعی مثبت دارند.

قضیه ۲.۰.۳. فرض کنید T_i و $T_{i'}$ طول عمر دو مولفه در یک سیستم چندمولفه ای باشند طوری که $i \neq i', i, i' = 1, \dots, n$ تحت مقیاس زمانی پواسن مرکب، طول عمر مولفه ها وابستگی ربعی مثبت دارند.

برهان. اگر $0 \leq t_{i'} \leq t_i$ مشاهده ای از $T_{i'}$ و T_i باشد براساس تعریف ۱.۰.۳ کافی است نشان دهیم رابطه زیر بزرگتر مساوی یک است

$$D(t_i, t_{i'}) = \frac{P(T_i > t_i, T_{i'} > t_{i'})}{P(T_i > t_i)P(T_{i'} > t_{i'})}.$$

اگر t_i و $t_{i'}$ به ترتیب دارای مقیاس زمانی تصادفی $H(t_i)$ و $H(t_{i'})$ باشد به علاوه $H(t_i) - H(0)$ و $H(t_{i'}) - H(t_i)$ مستقل باشند، داریم:

$$\begin{aligned} & P(T_i > t_i, T_{i'} > t_{i'} | H(t_i) - H(0), H(t_{i'}) - H(t_i)) \\ &= \exp\{-(\lambda_i + \lambda_{i'})H(t_i)\} \cdot \exp\{-\lambda_{i'}[H(t_{i'}) - H(t_i)]\}. \end{aligned}$$

تحت فرض مقیاس زمانی فرآیند پواسن داریم $H(t_i) \sim Pois(\mu(t_i))$ و

$$H(t_{i'}) - H(t_i) \sim Pois(\mu(t_{i'}) - \mu(t_i)).$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} & P(T_i > t_i, T_{i'} > t_{i'}) \\ &= \exp\{-\mu(t_{i'})(1 - \exp(-\lambda_{i'})) - \mu(t_i)(\exp(-\lambda_{i'}) - \exp(-(\lambda_i + \lambda_{i'})))\}. \end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} & P(T_i > t_i) = \exp\{-\mu(t_i)[1 - \exp(-\lambda_i)]\}, \\ & P(T_{i'} > t_{i'}) = \exp\{-\mu(t_{i'}[1 - \exp(-\lambda_{i'})]\}. \end{aligned}$$

بنابراین $D(t_i, t_{i'})$ به صورت زیر می باشد

$$D(t_i, t_{i'}) = \exp\{-\mu(t_i)[\exp(-\lambda_{i'}) + \exp(-\lambda_i) - \exp(-\lambda_i + \lambda_{i'}) - 1]\}.$$

زمانی که $0 \leq t_{i'} \leq t_i$ باشد $D(t_i, t_{i'})$ به صورت مشابه به دست می آید. در حالت کلی برای هر t_i و $t_{i'}$ داریم:

$$D(t_i, t_{i'}) = \exp\{-\mu(\min(t_i, t_{i'}))[\exp(-\lambda_i) + \exp(-\lambda_{i'}) - \exp(-(\lambda_i + \lambda_{i'})) - 1]\},$$

که مقدار $1 - \exp(-\lambda_i) - \exp(-\lambda_{i'}) + \exp(-(\lambda_i + \lambda_{i'}))$ برای $\lambda_i > 0, \lambda_{i'} > 0$ منفی است. از طرفی $\mu \min(t_i, t_{i'})$ نیز مثبت است. بنابراین $D(t_i, t_{i'}) \geq 1$ می باشد و اثبات کامل است. \square

۴ تابع نرخ خطر سیستم

تعریف ۱.۴.۱. اگر متغیر تصادفی T نشان دهنده طول عمر یک سیستم با تابع چگالی احتمال $f(t)$ و تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد. آنگاه تابع نرخ خطر سیستم به صورت زیر تعریف می شود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad t > 0.$$

اگر تابع نرخ خطر صعودی، ثابت یا نزولی باشد، به ترتیب گفته می شود سیستم دارای خاصیت IFR ، CFR یا DFR است. در اینجا ابتدا قابلیت اعتماد سیستم سری و سیستم موازی را تحت مقیاس زمان پواسن مرکب به دست می آوریم و سپس تابع نرخ خطر سیستم را در حالت خاص مورد بحث قرار می دهیم.

۱.۴ سیستم سری

هرگاه فعال بودن سیستم مستلزم فعال بودن تمام مولفه های سیستم باشد به آن سیستم سری گوئیم، در حالت کلی برای n مولفه وابسته، هانگ و همکاران (۱۸۰۲) نشان دادند که قابلیت اعتماد سیستم سری n مولفه ای وابسته تحت مقیاس زمان پواسن مرکب به صورت زیر است

$$R_s(t) = \exp\{-\mu(t)[1 - \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda_i)]\}. \quad (4)$$

همچنین تابع نرخ خطر سیستم سری تحت مقیاس زمانی پواسن مرکب به صورت زیر است

$$h_s(t) = \mu'(t)[1 - \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda_i)]. \quad (5)$$

برای بررسی رفتار تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر باید تابع $\mu(t)$ مشخص باشد. با در نظر گرفتن $\mu(t) = t^\beta$ که $\beta > 0$ ، تابع نرخ خطر به صورت زیر ساده می شود

$$h_s(t) = \beta t^{\beta-1} [1 - \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda_i)].$$

به راحتی مشاهده می شود که تابع $h_s(t)$ به ازای $\beta > 1$ ، $\beta = 1$ و $\beta < 1$ به ترتیب یک تابع صعودی، ثابت و نزولی است.

۲.۴ سیستم موازی

هرگاه فعال بودن سیستم مستلزم فعال بودن یکی از مولفه‌های سیستم باشد به آن سیستم موازی گوئیم، در حالت کلی برای n مولفه وابسته، هانگ و همکاران (۲۰۱۸) نشان دادند که قابلیت اعتماد سیستم سری n مولفه‌ای وابسته تحت مقیاس زمان پواسن مرکب به صورت زیر است:

$$R_p(t) = \sum_{\pi \in \Pi} \{(-1)^{|\pi|+1} \exp[-\mu(t)(1 - \exp(\pi^T \lambda))]\},$$

که Π مجموعه همه بردار π های ممکن که سیستم فعال باشد (بردار مسیر)، است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\pi = [\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{1,n}]^T$$

طوری که

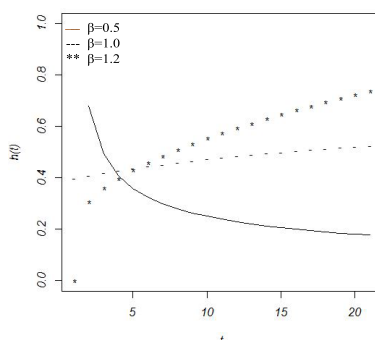
$$\pi_{1,l} = \begin{cases} 1 & \text{اگر در زمان } t \text{ مولفه } l \text{ ام فعال باشد.} \\ 0 & \text{اگر در زمان } t \text{ مولفه } l \text{ ام فعال نباشد.} \end{cases}$$

$$|\pi| = \sum_{i=1}^n \pi_{1,i}$$

بنابراین، تابع نرخ خطر سیستم سری تحت مقیاس زمانی پواسن مرکب به صورت زیر است:

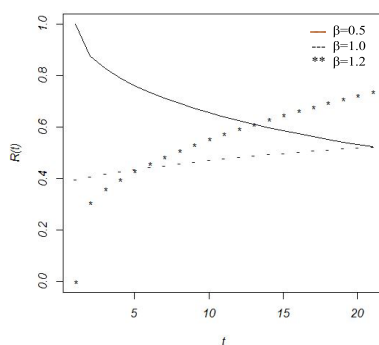
$$h_p(t) = \mu'(t) \frac{\sum_{\pi \in \Pi} \{(-1)^{|\pi|+1} (1 - \exp(-\pi^T \lambda)) \exp(-\mu(t)(1 - \exp(-\pi^T \lambda)))\}}{\sum_{\pi \in \Pi} \{(-1)^{|\pi|+1} \exp[-\mu(t)(1 - \exp(\pi^T \lambda))]\}}$$

ملاحظه می‌شود که فرم تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خطر در سیستم موازی پیچیده است و براحتی نمی‌توان در مورد رفتار آن قضاوت کرد، بنابراین با در نظر گرفتن $\mu(t) = t^\beta$ که $\beta > 0$ و $n = 2$ (یعنی یک سیستم موازی دو مولفه‌ای)، رفتار تابع نرخ خطر و تابع قابلیت اعتماد به ازای مقادیر مختلف β ، λ_1 و λ_2 در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش داده می‌شود.



شکل ۱: تابع نرخ خطر سیستم با $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$ با مقادیر β مشخص شده.

همانطور که در شکل ۱ می‌بینید، تابع نرخ خطر سیستم به ازای $\beta < 1$ روند نزولی دارد. به عبارتی با گذشت زمان نرخ خطر سیستم کاهش می‌یابد و دارای خاصیت DFR است و برای $\beta > 1$ دارای خاصیت

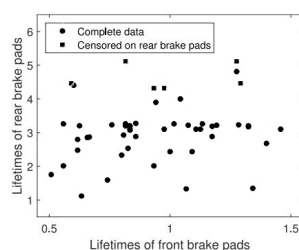


شکل ۲: تابع قابلیت اعتماد سیستم با $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$ با مقادیرهای β مشخص شده.

IFR می باشد. همانطور که مشاهده می شود تابع نرخ خطر سیستم به ازای $\beta \geq 1$ هرچه β بزرگتر شود، نرخ خطر سیستم شیب صعودی بیشتری می گیرد. شکل ۲ مربوط به قابلیت اعتماد سیستم می باشد.

۵ مثال واقعی

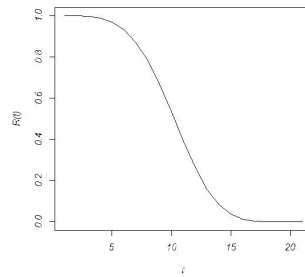
در مثال ذکر شده در بخش مقدمه گفته شد سیستم ترمز خودرو در شرایط عملیاتی پویا کار می کند به این صورت که یک سیستم سری دو مولفه ای وابسته داریم با توجه به فرضیات هانگ و همکاران (۲۰۱۸) داده های مربوط به طول عمر لنت های ترمز جلو و عقب خودرو برای ۵۰ تاکسی که ۴۴ تاکسی دارای داده کامل و برای ۶ تاکسی دیگر طول عمر لنت های ترمز عقب سانسور شده است. شکل ۳ داده های طول عمر لنت های جلو و عقب برای ۵۰ خودرو را نشان می دهد:



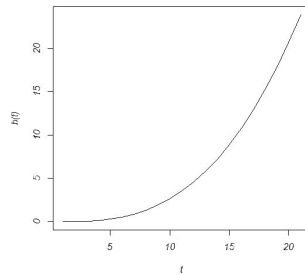
شکل ۳: طول عمر لنت های ترمز جلو و عقب

هانگ و همکاران (۲۰۱۸) با استفاده از روش درستنمایی ماکزیمم مقادیر λ_1 ، λ_2 و β را برآورد کرده و به ترتیب مقدار $۲/۶۹۲$ ، $۰/۰۰۸۳$ و $۳/۷۶۵$ به دست آمده است. با توجه به اینکه سیستم ترمز خودرو یک سیستم سری دو مولفه ای است تابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر آن را می توان با استفاده از روابط (۴) و (۵) رسم نمود.

شکل ۴ نشان می دهد که قابلیت اعتماد سیستم ترمز خودرو برای مدت اولیه ثابت است و سپس از قابلیت اعتماد آن کاسته می شود. به علاوه تابع نرخ خطر سیستم در شکل ۵ ابتدا ثابت و سپس افزایش می یابد.



شکل ۴: تابع قابلیت اعتماد سیستم ترمز خودرو



شکل ۵: تابع نرخ خطر سیستم ترمز خودرو

مراجع

- [1] Coit, D. W. and English, J. R. (1999), System reliability modeling considering the dependence of component environmental influences, in Proc. *IEEE Annu. Rel. Maintainability Symp.* 214–218.
- [2] Distefano, S., and Puliafito, A. (2009), Reliability and availability analysis of dependent–dynamic systems with DRBDs. *Rel. Eng. Syst. Saf.* **94**(9), 1381–1393.
- [3] Hong, L., Zhai, Q., Ye, Z.Sh. (2018), *System Reliability Evaluation Under Dynamic Operating Conditions*.
- [4] Khakzad, N., Khan, F. and Amyotte, P. (2012), Dynamic risk analysis using bowtie approach, *Rel. Eng. Syst. Saf.* **104**, 36–44.
- [5] Kotz, S., Lai, C. D., and Xie, M. (2003), On the effect of redundancy for systems with dependent components, *IIE Trans*, **35**(12), 1103–1110.
- [6] Peng, W., Shen, L., Shen, Y., and Sun, Q. (2018), Reliability analysis of repairable systems with recurrent misuse-induced failures and normal-operation failures, *Rel. Eng. Syst. Saf.* **171**, 87–98.

- [7] Singpurwalla, N. D., and Youngren, M. A. (1993), Multivariate distributions induced by dynamic environments. *Scand. J. Statist*, **20**, 251–261.
- [8] Yalaoui, A., Chu, C., and Chatelet, E. (2005), Reliability allocation problem in a series–parallel system, *Rel. Eng. Syst. Saf*, **90**(1), 55–61.
- [9] Zheng, W., and Liyang, X.(2008), Dynamic reliability model of components under random load. *IEEE Trans. Rel.* 57(3), 474–479.