آزمون نیکویی برازش برای توزیع رایلی معکوس بر مبنای روش‌های آنتروپی و غیر آنتروپی سانسور فزاینده نوع دوم

س. مسلمی، آ. حبیبی راد، و. احراری

دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار

هشتمین سمینار نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

تعریف ۱ (آنتروپی باقیمانده تجمعی(CRE)،واگرایی کلبک لایبر باقیمانده تجمعی ((CRKL)

اگر Xیک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)$ باشد، معیار آنتروپی باقیمانده تجمعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CRE(X) = -\int_{0}^{+\infty} \bar{F}(x) \ln \bar{F}(x)\, \mathrm{d}x$$

معیار جدیدی از فاصله بین دو توزیع نامنفی و پیوسته بر اساس آنتروپی باقیمانده تجمعی (CRE) توسط براتپور و حبیبی راد [۱] به نام واگرایی کولبک لایبر باقیمانده تجمعی (CRKL) تعریف شده است. برای متغیرهای تصادفی نامنفی و پیوسته X و Y با تابع توزیع‌های $F(x)$ و $G(x)$ این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$CRKL(F:G) = -\int_{0}^{\infty} \bar{F}(X) \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)}\, \mathrm{d}x - [E(X) - E(Y)]$$

آن‌ها ثابت کردند CRKL نامنفی است و برابری زمانی رخ می‌دهد، اگر و تنها اگر $F(x) = G(x) \;\;, \; a.e$.

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۲ (آنتروپی تجمعی(CE)،اطلاعات کلبک لایبر تجمعی (CKL))

آنتروپی تجمعی (CE) توسط دی کریشنزو و لانگوباردی [۳] مورد مطالعه قرارگرفته است و برای متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته X با تابع توزیع $F(x)$ این معیار را به صورت زیر تعریف کردند:

$$CE(X) = -\int_{0}^{\infty} F(x) \ln F(x) \, dx$$

معیار دیگری از فاصله بین دو توزیع بر اساس تابع توزیع تجمعی توسط پارک و همکاران [۲] مطرح شد، که به آن اطلاعات کلبک لایبر تجمعی (CKL) می‌گویند، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CKL(F:G) = -\int_{0}^{\infty} F(x) \ln \frac{F(x)}{G(x)} \, dx - [E(Y) - E(X)]$$

$CKL(F:G) \geq 0$ و تساوی برابری برقرار است، اگر و تنها اگر $a.e \;, \; F = G$.

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۳ (سانسور فزاینده نوع دوم)

در سانسور فزاینده نوع دوم فرض کنید n واحد به طور تصادفی انتخاب و مورد آزمایش قرار می‌دهیم، قبل شروع آزمایش مشخص می‌کنیم که آزمایش در زمان m امین شکست به پایان برسد.

در این سانسور در زمان اولین شکست آزمایشگر R_1 واحد از $n-1$ واحد باقیمانده را سانسور می‌کند، سپس به دنبال دومین شکست آزمایشگر R_2 واحد از $n-R_1-2$ واحد باقیمانده را سانسور می‌کند. این روند ادامه پیدا می‌کند تا زمان شکست m امین واحد،

$R_m = n - m - \sum_{i=0}^{m-1} R_i$ واحد باقیمانده سانسور می‌شود. مقادیر $R = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ قبل از شروع آزمایش مشخص می‌شوند. سانسور نوع دوم معمولی، نوع خاصی از سانسور فزاینده نوع دوم می‌باشد. به طوریکه $R_1 = R_2 = \cdots = R_{m-1} = 0$ و $R_m = n - m$ آنگاه سانسور فزاینده نوع دوم تبدیل به سانسور نوع دوم معمولی می‌شود.

همچنین اگر $R_1 = R_2 = \cdots = R_m = 0$ آنگاه دیگر نمونه سانسور شده نداریم و با یک نمونه کامل مواجه هستیم.

به دست آوردن آماره آزمون‌ها به روش آنتروپی

در این بخش دو آماره آزمون برای آزمون نیکویی برازش توزیع رایلی معکوس بر اساس $CRKL$ و CKL برای داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم بدست می‌آوریم. فرض کنید $x_{1:m:n} < x_{2:m:n} < \cdots < x_{m:m:n}$ داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم با طرح سانسور $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ و با تابع توزیع $F(x)$ باشد. برای راحتی داده‌ها را به صورت $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم فرضیه‌های زیر را بر اساس داده‌های $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ آزمون کنیم:

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad Vs \quad H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

دراینجا $F_0(x) = \exp(-\frac{\theta^2}{x^2}) \;\; ; \;\; x, \theta > 0$ و θ پارامتر ناشناخته است.

بنا به بالاکریشنان و آگوروالا [۳] تابع توزیع تجربی $F_{m:n}(x)$ برای برآورد تابع توزیع $F(x)$ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
F_{m:n}(x) &= 0 \qquad x < x_1 \\
&= p_i \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
&= p_m \qquad x > x_m
\end{aligned}
$$

که $p_i = E(U_i)$ آماره‌های مرتب، از داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم‌اند که دارای توزیع یکنواخت صفر و یک هستند. با تغییر متغیرهای:

$$
V_۱ = \frac{۱ - U_{m:m:n}}{۱ - U_{m-۱:m:n}} \;,\;\; V_۲ = \frac{۱ - U_{m-۱:m:n}}{۱ - U_{m-۲:m:n}} \;,\;\ldots,\;\; V_m = ۱ - U_{۱:m:n}
$$

و با معکوس گرفتن از V_i ها داریم

$U_{i:m:n} = ۱ - \prod_{j=m-i+۱}^{m} V_j \;\; ; \;\; i = ۱, ۲, \ldots, m$،

از طرفی میدانیم $V_i \sim Beta(i + \sum_{j=m-i+1}^{m} R_j, ۱) \;\; ; \; i = ۱, ۲, \ldots, m$ پس با تعریف

$$a_i = i + \sum_{j=m-i+1}^{m} R_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_i + 1}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$p_i = E(U_{i:m:n}) = ۱ - \prod_{j=m-i+۱}^{m} \frac{j + \sum_{k=m-j+۱}^{m} R_k}{j + \sum_{k=m-j+۱}^{m} R_k + ۱}$$

ما و گوئا [۳] براوردی برای پارامتر مقیاس توزیع رایلی معکوس بر اساس داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم بدست آوردند. براوردگر پیشنهادی آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\theta} = \frac{-b - \sqrt{b^{۲} - ۴am}}{۲a}$$

$$a = \sum_{i=۱}^{m} \frac{R_i A_i - ۱}{x_i^{۲}} \quad ; \quad b = \sum_{i=۱}^{m} \frac{R_i B_i}{x_i^{۲}}$$

که در آن‌ها

$$A_i = \frac{p_i(۱ - p_i + ۲\ln(p_i))}{(۱ - p_i)^{۲}} \quad ; \quad B_i = \frac{۲p_i(-\ln(p_i))^{۳/۲}}{(p_i - ۱)^{۲}} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m$$

با استفاده از CRKL و داده‌های سانسور شده فزاینده نوع دوم داریم:

$$
\begin{aligned}
CRKL(F_{m:n}(x):F_0) &= \int_0^{x_m} (1-F_{m:n}(x)) \ln\left(\frac{1-F_{m:n}(x)}{1-F_0(x)}\right) \mathrm{d}x \\
&\quad - [E(X)-E(Y)] \\
&= \int_0^{x_m} (1-F_{m:n}(x)) \ln\left(\frac{1-F_{m:n}(x)}{1-\exp(-\frac{\theta^2}{x^2})}\right) \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^{x_m} (1-F_{m:n}(x)) \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^{x_m} (1-\exp(-\frac{\theta^2}{x^2})) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m-1} (1 - p_i) \ln(1 - p_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{m-1} (1 - p_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ln(1 - \exp(-\frac{\theta^2}{x^2}))\, \mathrm{d}x \\
&\quad - \sum_{i=0}^{m-1} (1 - p_i)(x_{i+1} - x_i) + \int_0^{x_m} (1 - \exp(-\frac{\theta^2}{x^2}))\, \mathrm{d}x \qquad (۲)
\end{aligned}
$$

با جایگزین کردن $\hat{\theta}$ به جای θ در (۲) و تقسیم جملات بر $\int_{۰}^{x_m} (۱ - F_{m:n}(x))\, \mathrm{d}x$ آماره آزمون مورد نظر پایا شده وبه صورت زیر بدست می‌آید.

آماره آزمون بر اساس $CRKL$:

$$T_{CRKL} = D - E + F - 1$$

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1}(1-p_i)\ln(1-p_i)(x_{i+1}-x_i)}{\sum_{i=0}^{m-1}(1-p_i)(x_{i+1}-x_i)}$$

$$E = \frac{\sum_{i=0}^{m-1}(1-p_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\ln(1-\exp(-\frac{\hat{\theta}^2}{x^2}))\,\mathrm{d}x}{\sum_{i=0}^{m-1}(1-p_i)(x_{i+1}-x_i)}$$

$$F = \frac{\int_{0}^{x_m}(1-\exp(-\frac{\hat{\theta}^2}{x^2}))\,\mathrm{d}x}{\sum_{i=0}^{m-1}(1-p_i)(x_{i+1}-x_i)}$$

آماره آزمون بر اساس CKL به طور مشابه برابر است با:

$$T_{CKL} = P - Q - R + ۱$$

$$P = \frac{\sum_{i=۰}^{m-۱} p_i \ln p_i (x_{i+۱} - x_i)}{\sum_{i=۰}^{m-۱} (۱ - p_i)(x_{i+۱} - x_i)} \quad ; \quad Q = \frac{\hat{\theta}^۲ \sum_{i=۰}^{m-۱} p_i (\frac{۱}{x_{i+۱}} - \frac{۱}{x_i})}{\sum_{i=۰}^{m-۱} (۱ - p_i)(x_{i+۱} - x_i)}$$

$$R = \frac{\int_۰^{x_m} (۱ - \exp(-\frac{\hat{\theta}^۲}{x^۲}))\, \mathrm{d}x}{\sum_{i=۰}^{m-۱} (۱ - p_i)(x_{i+۱} - x_i)}$$

به دست آوردن آماره آزمون به روش غیر آنتروپی

اگر $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم با طرح سانسور $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ از توزیع رایلی معکوس باشند. آنگاه

$$Y_i = -\ln(1 - F(x_i)) = -\ln(1 - \exp(-\frac{\theta^2}{x^2}))$$

به طوریکه $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_m$ داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم از توزیع نمایی استاندارد هستند. برابری‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$T_1 = nY_1$$

$$T_i = \left[n - \sum_{j=0}^{i-1}(R_i + 1)\right](Y_i - Y_{i+1}) \;\; ; \quad i = 2, \ldots, m$$

ویوروس و بالاکریشنان [۱] به این نتیجه رسیدند که $T_۱, T_۲, \ldots, T_m$ نمونه ها مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی استاندارد هستند. بنابراین کمیت محوری زیر نتیجه می‌شود:

$$W = 2\sum_{i=1}^{m} T_i = 2\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)Y_i = 2\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\left[-\ln(1-\exp(-\frac{\theta^2}{x^2}))\right] \qquad (۳)$$

W دارای توزیع کای دو با $۲m$ درجه آزادی است. با جایگذاری $\hat{\theta}$ به جای θ در فرمول (۳) آماره آزمون به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W = ۲\sum_{i=۱}^{m}(R_i+۱)\left[-\ln(۱-\exp(-\frac{\hat{\theta}^۲}{x^۲}))\right]$$

مطالعات شبیه سازی

برای آماره‌های آزمون T_{CRKL} و T_{CKL} مقادیر بزرگ و برای آماره آزمون W مقادیر بزرگ یا کوچک باعث رد فرضیه $H_۰$ می‌شوند. توزیع دقیق آماره‌های آزمون به سختي به دست می‌آیند، بنابراین از شبیه سازی مونت کارلو برای تعیین مقادیر بحرانی سه آماره آزمون فوق استفاده می‌کنیم. با کمک الگوریتم بالاکریشنان و ساندا [۱] بیش از ۱۰۰۰۰ نمونه سانسور فزاینده نوع دوم از توزیع رایلی معکوس تحت طرح‌های مختلف سانسور فزاینده نوع دوم تولید می‌کنیم. مقادیر آماره آزمون T_{CRKL}، T_{CKL}، W به ترتیب برای هرنمونه بدست می‌آوریم. همچنین از مقادیر $T_{CRKL,۹۵}$، $T_{CRKL,۹۰}$، $T_{CKL,۹۵}$، $T_{CKL,۹۰}$، $W_{/۰۲۵}$، $W_{/۹۷۵}$، $W_{/۰۵}$، $W_{/۰۹۵}$ برای بدست آوردن مقادیر بحرانی استفاده می‌کنیم.

برای مطالعه توان، فرضیه‌های جایگزین، بر حسب نوع تابع نرخ خطر به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

۱) تابع نرخ خطر به طور یکنواخت کاهشی

$P(۱, ۳)$: توزیع پارتو با پارامتر شکل ۳ و پارامتر مقیاس ۱.

$P(۱, ۴)$: توزیع پارتو با پارامتر شکل ۴ و پارامتر مقیاس ۱.

۲) تابع نرخ خطر به طور یکنواخت افزایشی

$\chi^2_{(۴)}$: توزیع کای دو با ۴ درجه آزادی .

$W(۲, ۱)$: توزیع وایبل با پارامتر شکل ۲ و پارامتر مقیاس۱.

۳) تابع نرخ خطر غیر یکنواخت

$LN(۱, ۱/۲)$: توزیع لگ نرمال با پارامتر مکان ۱ و پارامتر مقیاس ۱/۲ .

$LN(۱, ۲)$: توزیع لگ نرمال با پارامتر مکان ۱ و پارامتر مقیاس ۲.

جدول ۱: طرح‌های استفاده شده در مطالعات شبیه سازی

n	m	$(R_1, R_2, \ldots, R_m)$	شماره طرح
۱۰	۶	$R_1 = 4, R_i = 0 for i \neq 1$	(۱)
	۸	$R_8 = 2, R_i = 0 for i \neq 8$	(۲)
۲۰	۱۵	$R_1 = 5, R_i = 0 for i \neq 1$	(۳)
	۱۳	$R_1 = 3, R_{13} = 4, R_i = 0 for i \neq 1, 13$	(۴)
۶۰	۴۰	$R_1 = R_{40} = 10, R_i = 0, for i \neq 1, 40$	(۵)
	۵۵	$R_1 = 5, R_i = 0 for i \neq 1$	(۶)

از ما و گوئا [۲] و جداول زیر درباره توان آماره‌ها نتیجه گیری کردیم.

جدول ۲: توان آزمون‌ها برای توزیع‌هایی با تابع نرخ خطر کاهشی در فرضیه جانشین

	P(۱،۴)			P(۱،۳)		
شماره طرح	W	T_{CRK}	T_{CRKL}	W	T_{CRK}	T_{CRKL}
(1)	1.000	0.999	0.013	1.000	0.981	0.102
(2)	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999
(3)	0.096	0.740	0.020	0.471	0.739	0.130
(4)	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999
(5)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
(6)	0.137	0.238	0.041	0.655	0.887	0.231

جدول ۳: توان آزمون‌ها برای توزیع‌هایی با تابع نرخ خطر افزایشی درفرضیه جانشین

	$W(2,1)$			$\chi^2_{(4)}$		
شماره طرح	W	T_{CRK}	T_{CRKL}	W	T_{CRK}	T_{CRKL}
(1)	0.269	0.324	0.080	0.457	0.438	0.202
(2)	0.358	0.427	0.307	0.579	0.616	0.525
(3)	0.474	0.596	0.080	0.745	0.781	0.206
(4)	0.607	0.688	0.577	0.836	0.862	0.823
(5)	0.925	0.972	0.919	0.996	0.998	0.995
(6)	0.791	0.957	0.095	0.985	0.995	0.262

جدول ۴: توان آزمون‌ها برای توزیع‌هایی با تابع نرخ غیر یکنواخت در فرضیه جانشین

	$LN(1,2)$			$LN(1,1.2)$		
شماره طرح	W	T_{CRK}	T_{CRKL}	W	T_{CRK}	T_{CRKL}
(1)	0.980	0.977	0.960	0.805	0.794	0.648
(2)	0.992	0.991	0.991	0.887	0.886	0.866
(3)	0.999	0.999	0.999	0.984	0.981	0.819
(4)	0.999	0.999	0.999	0.985	0.985	0.983
(5)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
(6)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.985

نتایج جداول ۱ تا ۳

تابع نرخ خطر کاهشی: وقتی سانسور از چپ (شماره ۱, ۳, ۶) داریم هر سه آزمون توان نسبتا بالایی دارند. وقتی حجم نمونه بیشتر از ۲۰ باشد، توان‌ها بیشتر از ۵۰ درصد هستند و آماره T_{CKL} همیشه بهترین عملکرد را دارد. برای نمونه‌های با حجم کم T_{CRKL} بهتر از آماره W است، با افزایش حجم نمونه تفاوت‌ها کاهش پیدا می‌کند.

زمانی که طرح سانسور ما سانسور از راست (شماره ۲) یا دو طرفه (شماره ۵ ,۴) باشد، بالاترین توان برای T_{CRKL} است. برای حجم نمونه‌های کم، توان T_{CKL} بهتر از W است، مگر در موارد محدود. زمانی که حجم داده ها نسبتا زیاد باشد تفاوت بین T_{CKL} و W کم است و دو آماره توان بالايي دارند، که بیش از ۶۰ درصد است.

تابع نرخ خطر افزایشی: زمانی که طرح سانسور، سانسور از چپ (شماره ۱, ۳, ۶) باشد، T_{CKL} توان بیشتری نسبت به دو آماره دیگر دارد. توان T_{CRKL} حدود ۲۰ درصد تا ۴۰ درصد است.

W توان بالاتری را نسبت به T_{CRKL} دارد. با افزایش حجم نمونه تفاوت‌ها کاهش میابد.

برای سانسور از راست (شماره ۲) و دو طرفه (شماره $۴,۵$) تفاوت این سه آزمون قابل توجه نیست.

هرسه ازمون خوب عمل می‌کنند، و توان هر سه آزمون، در همه موارد بیشتر از ۵۰ درصد است.

تابع نرخ خطر غیر یکنواخت:

سه آزمون تفاوت قابل توجهی ندارند، و همگی توان بالایی دارند و توان هرسه آزمون بیشتر از ۵۰درصد، در بسیاری از موارد به بیش از ۷۰ درصد می‌رسد.

مثال ۱

در این بخش مجموعه داده‌های زیر را که زمان شکست $n = ۲۳$ بلبرینگ شیار عمیق است، درنظر می‌گیریم.

۰٫۱۷۸۸, ۰٫۲۸۹۲, ۰٫۳۳, ۰٫۴۱۵۲, ۰٫۴۲۱۲, ۰٫۴۵۶۰, ۰٫۴۸۴۸, ۰٫۵۱۸۴
۰٫۵۱۹۶, ۰٫۵۴۱۲, ۰٫۵۵۵۶, ۰٫۶۷۸۰ ۰٫۶۸۶۴, ۰٫۶۸۶۴, ۰٫۶۸۸۸, ۰٫۸۴۱۲, ۰٫۹۳۱۲
۰٫۹۸۶۴, ۱٫۰۵۱۲, ۱٫۰۵۸۴, ۱٫۲۷۹۲, ۱٫۲۸۰۴, ۱٫۷۳۴۰

رقاب [۲] به این نتیجه رسید که توزیع رایلی به خوبی با داده‌های بلبرینگ مطابقت دارد.
داده‌های معکوس تولید شده از این داده‌ها دارای توزیع رایلی معکوس هستند.
نمونه‌ای از سانسور فزاینده نوع دوم، با طرح سانسور $R(۱۰, ۱۲ * ۰)$، از معکوس داده‌ها، تولید می‌کنیم. مجموعه داده‌ها:

۰٫۵۷۶۷۰۱۳, ۰٫۷۸۱۰۰۵۹, ۰٫۷۸۱۷۳۸۶, ۰٫۹۴۴۸۲۲۴, ۰٫۹۵۱۲۹۳۸, ۱٫۰۱۳۷۸۷۵
۱٫۰۷۳۸۸۳, ۱٫۱۸۸۷۷۷۹, ۱٫۴۵۱۸۰۰۲, ۱٫۴۵۶۸۷۶۵, ۱٫۴۵۶۸۷۶۵, ۱٫۴۷۴۹۲۶۳, ۱٫۷۹۹۸۵۶

مثال ۲

جدول ۵: مقادیر آماره‌ها و پی مقدار

آماره آزمون	T_{CRKL}	T_{CKL}	W
مقدار آماره	0.020	0.015	16.050
پی مقدار	0.708	0.595	0.986

جدول ۵ آنالیز داده‌های واقعی را نشان می‌دهد. در این جدول مشاهده می‌شود که پی مقدار سه آماره بیشتر از ۰/۰۵ است، که از آن می‌توان نتیجه گرفت، نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم مشاهده شده، از توزیع رایلی معکوس پیروی می‌کنند. علاوه بر این متوجه می‌شویم پی مقدار آماره W بیشتر از دو آماره دیگر است که نشان می‌دهد آماره W از فرضیه صفر بیشتر پشتیبانی می‌کند.

آینده تحقیق: در ادامه این مطالعه به دنبال آزمون نیکویی برازش توزیع‌های تعمیم یافته رایلی معکوس تحت داده‌های سانسور شده می‌باشیم.

مراجع:

- Baratpour, S.& Habibirad, A. (2012), *Testing goodness of fit for exponential distribution based on cumulative residual entropy*, Communications in Statistics 41(8): 1387–1396.

- Park, S., Rao, M., & Dong,W.S. (2012), *On cumulative residual Kullback–Leibler information*, Statistics & Probability Letters 82(11): 2025–2032.

- Di Crescenzo, A.D. & Longobardi, M. (2009), *On cumulative entropies. Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(12): 4072–4087.

مراجع:

- Viveros, R. & Balakrishnan, N. (1994), *Interval estimation of parameters of life from progressively censored data*, Technometrics 36(1): 84–91.
- Ma, Y., Gui, W. (2021), *ENTROPY-BASED AND NON-ENTROPY-BASED GOODNESS OF FIT TEST FOR THE INVERSE RAYLEIGH DISTRIBUTION WITH PROGRESSIVELY TYPE-II CENSORED DATA*, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 35(3), 631-649
- Ma, Y. & Gui, W. (2018), *Pivotal inference for the inverse Rayleigh distribution based on general progressively type-II censored samples*, Journal of Applied Statistics 46(5): 1–27.

مراجع:

- Balakrishnan, N. & Sandhu, R.A. (1995), *A simple simulational algorithm for generating progressive type-II censored samples*, American Statistician 49(2): 229–230.
- Raqab, M.Z. (2002), *Inferences for generalized exponential distribution based on record statistics*, Journal of Statistical Planning and Inference 104(2): 339–350.
- Balakrishnan, N. & Aggarwala, R. (2000), *Progressive censoring: theory, methods, and applications*, Boston: Birkhauser.