مطالعه‌ای بر نظریه‌ی قابلیت اعتماد در خانواده توزیع طول عمر پواسون تعمیم‌یافته

فاطمه سادات میرصدوقی و دکتر اکرم کهن‌سال

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

۲۸ اردیبهشت ۱۴۰۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف (پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای)

باتاچاریا و جانسون [۱] اولین بار پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای را به‌صورت

$$R_{s,k}=\sum_{p=s}^{k}\int_{-\infty}^{+\infty}(۱-F_X(y))^p(F_X(y))^{k-p}dF_Y(y)$$

بسط دادند که در آن متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب به عنوان متغیرهای تنش و مقاومت در نظر گرفته می‌شوند

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف (سانسور فزاینده)

برای تشریح این طرح سانسور وضعیتی را در نظر بگیرید که N واحد مستقل و یکسان با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$، تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته‌اند. بلافاصله پس از اولین شکست، R_1 واحد تحت بررسی به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند، پس از دومین شکست، R_2 واحد تحت بررسی و به همین ترتیب تا اینکه در زمان شکست n ام همه R_n واحد تحت بررسی به طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند. این طرح سانسور فزاینده نامیده می‌شود و تابع درستنمایی آن به‌صورت $L(\theta) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i)(1-F(x_i))^{R_i}$ نوشته می‌شود.

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف (توزیع خانواده پواسون تعمیم‌یافته)

اگر X دارای توزیع خانواده پواسون تعمیم‌یافته باشد، تابع چگالی به‌صورت

$$g(t;\boldsymbol{\theta},\lambda) = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} f_{\boldsymbol{\theta}}(t) e^{-\lambda \bar{F}_{\boldsymbol{\theta}}(t)},$$

بیان می‌شود؛ که در آن $f_{\boldsymbol{\theta}}(t)$ تابع چگالی و بردار $\boldsymbol{\theta}$ بردار پارامترهای توزیع پایه است و همچنین رابطه‌ی $\bar{F}_{\boldsymbol{\theta}}(t) = (1 - F_{\boldsymbol{\theta}}(t))$ برقرار است.

مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف (توزیع نمایی)

یکی از توزیع‌هایی که به عنوان توزیع پایه در توزیع خانواده پواسون تعمیم‌یافته مورد استفاده قرار می‌گیرد توزیع نمایی است. اگر $Z_۱, Z_۲, \ldots, Z_N$ نمونه تصادفی نامنفی با توزیع نمایی باشند به‌طوری‌که تابع توزیع تجمعی آن به صورت $F(z;\beta) = ۱ - e^{-\beta z}$، $\beta > ۰$، و تابع چگالی آن به فرم $f(z;\beta) = \beta e^{-\beta z}$ باشد در این صورت تابع چگالی توزیع نمایی-پواسون تعمیم‌یافته به‌صورت $g(t;\beta,\lambda) = \dfrac{\lambda\beta e^{-\beta t-\lambda e^{-\beta t}}}{۱ - e^{-\lambda}}$, به دست می‌آید.

پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر تنش-مقاومت با فرض اینکه مدل دارای دو متغیر مقاومت $X_1 \sim G_1(\lambda_1, \boldsymbol{\theta})$ و $X_2 \sim G_2(\lambda_2, \boldsymbol{\theta})$ و یک متغیر تنش $Y \sim G(\lambda_3, \boldsymbol{\theta})$ به‌طوری‌که بردار پارامتر مشترک $\boldsymbol{\theta}$ نامعلوم باشد، به دست می‌آوریم. در این شرایط پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ به‌صورت

$$R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \sum_{p_2=s_2}^{k_2} \binom{k_1}{p_1} \binom{k_2}{p_2} \int_0^\infty (1 - G_1(t))^{p_1} (G_1(t))^{k_1-p_1} (1 - G_2(t))^{p_2} \times (G_2(t))^{k_2-p_2} dG(t),$$

نوشته می‌شود.

برآورد ماکسیمم درستنمایی

برای محاسبه‌ی تابع درستنمایی، می‌توان n سیستم را روی آزمایش طول عمر در نظر گرفت. حال فرض می‌کنیم $\{Y_۱, ..., Y_n\}$ یک نمونه تنش مشاهده‌شده از توزیع $(\boldsymbol{\theta}, \lambda_۳)$ با طرح سانسور $\{N, n, S_۱, ..., S_n\}$ و $\{U_{i۱}, ..., U_{ik_۱}\}$، $i = ۱, .., n$ یک نمونه مقاومت مشاهده‌شده از توزیع $(\boldsymbol{\theta}, \lambda_۱)$ با طرح سانسور $\{K_۱, k_۱, R_{۱۱}, R_{۱۲}, ..., R_{۱k_۱}\}$ و $\{V_{i۱}, ..., V_{ik_۲}\}$ $i = ۱, ..., n$، یک نمونه مقاومت مشاهده‌شده از توزیع $(\boldsymbol{\theta}, \lambda_۱)$ با طرح سانسور $\{K_۲, k_۲, Q_{۱۱}, Q_{۱۲}, ..., Q_{۱k_۲}\}$ است. در این صورت با مشتق گرفتن از تابع لگ درستنمایی و حل آن به روش‌های عددی برآورد ماکسیمم درستنمایی به‌دست می‌آید.

بازه اطمینان

- بازه اطمینان مجانبی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ در دو مرحله به دست می‌آید. ابتدا؛ با استفاده از قضیه حد مرکزی چند متغیره، توزیع مجانبی پارامترهای نامعلوم، یعنی $(\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳, \boldsymbol{\theta})$ را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از روش دلتا توزیع مجانبی $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ را ارائه می‌دهیم.
- با استفاده از الگوریتم‌های بیان شده در مقاله ،فواصل اطمینان بوت‌استرپ نیز به‌دست می‌آیند.

شبیه‌سازی

شبیه‌سازی مونت‌کارلو، با استفاده از نرم‌افزار متلب، انجام شده‌است. برای این کار فرض می‌شود:

- $n = ۱۰, k_۱ = ۵, k_۲ = ۶$، $(\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳, \beta) = (۴, ۵, ۶, ۳)$
- طرح‌های سانسور به‌صورت:

$$\begin{aligned}
R_۱ &= [۱, ۱, ۱, ۱, ۱], Q_۱ = [۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱], S_۱ = [۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱],\\
R_۲ &= [۵, ۰, ۰, ۰, ۰], Q_۲ = [۶, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰], S_۲ = [۱۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰],\\
R_۳ &= [۰, ۰, ۰, ۰, ۵], Q_۳ = [۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۶], S_۳ = [۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱۰].
\end{aligned}$$

- $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = ۰/۳۴۳۴$
- سطح معناداری فواصل اطمینان: $۱۰۰(۱ - \alpha)\% = ۹۵\%$

جدول: نتایج شبیه‌سازی در سانسور فزاینده با فرض اینکه پارامترهای مشترک نامعلوم هستند.

طرح سانسور	MLE		بازه اطمینان مجانبی		روش بوت-t		روش بوت-p	
	اریبی	MSE	بازه اطمینان مجانبی	CP	بوت-t	CP	بوت-p	CP
(R_1, Q_1, S_1)	−۰/۰۶۱۳	۰/۰۰۳۹	[۰/۱۱۲۳, ۰/۴۴۴۹]	۰/۹۴۸	[۰/۱۰۵۱, ۰/۶۷۲۳]	۰/۹۴۵	[۰/۱۱۱۲, ۰/۵۷۶۳]	۰/۹۴۰
(R_2, Q_2, S_2)	−۰/۰۷۰۱	۰/۰۰۵۱	[۰/۱۵۰۸, ۰/۴۹۵۸]	۰/۹۵۱	[۰/۱۱۰۱, ۰/۶۹۵۴]	۰/۹۴۴	[۰/۱۲۳۸, ۰/۵۵۵۴]	۰/۹۳۹
(R_3, Q_3, S_3)	−۰/۰۵۱۸	۰/۰۰۲۹	[۰/۱۹۶۳, ۰/۴۸۷۰]	۰/۹۵۰	[۰/۱۰۰۷, ۰/۶۸۴۹]	۰/۹۴۶	[۰/۱۱۷۸, ۰/۵۶۶۹]	۰/۹۴۲
(R_1, Q_2, S_2)	−۰/۰۵۵۵	۰/۰۰۳۳	[۰/۱۳۴۵, ۰/۴۴۱۳]	۰/۹۵۱	[۰/۱۱۱۲, ۰/۶۷۰۹]	۰/۹۴۵	[۰/۱۲۰۷, ۰/۵۵۵۲]	۰/۹۴۰
(R_2, Q_3, S_1)	−۰/۰۶۴۶	۰/۰۰۴۳	[۰/۱۶۱۱, ۰/۳۹۶۶]	۰/۹۴۹	[۰/۱۲۸۵, ۰/۶۸۶۹]	۰/۹۴۶	[۰/۱۱۹۵, ۰/۵۶۶۵]	۰/۹۴۱

از جدول ۱ ملاحظه می‌شود که مقادیر برآورد و مقادیر MSEها، تحت طرح‌های سانسور مختلف به هم نزدیک هستند. در هر ستون نیز احتمالات پوشش فواصل(CP)، محاسبه شده و علاوه بر این مشاهده می‌شود که فواصل اطمینان مجانبی دارای طول کمتری نسبت به فواصل اطمینان بوت استرپ هستند. همچنین فواصل اطمینان به روش بوت-p دارای طول کمتری نسبت به فواصل اطمینان به روش بوت-t هستند.

مراجع:

- Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), *Estimation of reliability in multicomponent stressstrength model*, J Am Stat Assoc. 69, 966–970.
- Kohansal, A., Fernandez, A.J. and Perez-Gonzalez, C.J., (2021), *Multi-component stress-strength parameter estimation of a non-identical-component strengths system under the adaptive hybrid progressive censoring samples*, Statistics. 55, 925-962.
- Ramos, P.L., Dey, D.K., Louzada, F. and Lachos, V.H., (2019), *An extended Poisson family of life distribution:a unified approach in competitive and complementary risks*, J. Appl. Stat. 47, 306-322.