با فرستادن این مقاله به کارگاه ها و همایش های قطب علمی داده های ترتیبی و فضایی (W-OSDCE) تأیید می‌کنم که
(۱) محتوی و اصیل بودن این مقاله بر عهده من و دیگر نویسندگان مقاله است.
(۲) دیگر نویسندگان مقاله با فرستادن این مقاله به W-OSDCE موافق بوده‌اند.

مباحثی در توابع نرخ خطر U -شکل و کاربرد آن ها

حبیبی، م. [1] *

[1] گروه آمار زیستی، دانشکده علوم پزشکی، دانشگاه تربیت مدرس
mahin.habibi@modares.ac.ir

چکیده. در عصر حاضر، با توجه به اهمیت و کاربردهای ویژه‌ای که روش‌های قابلیت اعتماد پیدا کرده‌اند، بیان تعریف‌ها ومعیارهای دقیق از این روش‌ها و مطالعه پیرامون ویژگی‌های آن‌ها ضرورت یافته است. دانستن شکل و نوع سالخوردگی و کارافتادگی یک سیستم و یا مؤلفه‌ای از یک سیستم از اهمیت خاصی برای طراحان سیستم یا مهندس نگهداری و تعمیرات برخوردار است. این اهمیت از آن جهت است که می‌توان با توجه به اطلاعات موجود عملکرد سیستم را پیش‌بینی کرده و از خرابی‌های ناگهانی جلوگیری به‌عمل آورد. لذا مطالعه مدل‌های مختلف سالخوردگی به ویژه مطالعه در رفتار نرخ خطر یک سیستم تحت الگوهای مختلف آماری می‌تواند برای طراحان و کاربران سیستم در جنبه‌های مختلف تکنولوژی مفید باشد. در این مطالعه به تعریف و بررسی توابع وانی شکل و ویژگی‌های آن می‌پردازیم. هم چنین در مورد عمر مفید این توابع و اهمیت تخمین این دوره بحث میکنیم و در نهایت به معرفی یک توزیع پیوسته وانی شکل می پردازیم.

۰. پیشگفتار

در بسیاری از موقعیت‌های طبیعی، با اشیائی (موجودات زنده یا کالاهای تولید شده) سروکار داریم که سه دوره متفاوت، دوره پر خطر آغازین، دوره مفید و دوره فرسایش را در عمر خود تجربه می‌کنند. قطعه‌ای را در نظر بگیرید که در ابتدای عمر در معرض مخاطره‌های زیادی است و با گذر از دوره‌ی پرخطر آغازین، به شرایط مطلوبی می‌رسد و پس از گذراندن یک دوره مفید طول عمر که خطر جدی آن را تهدید نمی‌کند، دوره فرسایش که در آن به تدریج فرسوده و مستهلک می‌شود، آغاز می‌شود. به صورت ساده‌تر، اگر معیار سالخوردگی را براساس تابع نرخ شکست تعریف کنیم آن‌گاه نرخ شکست در یک بازه ابتدایی عمر اکیداً نزولی، در یک بازه میانی تقریباً ثابت و در انتهای عمر اکیداً صعودی است. برای مثال، هنگامی که یک تولیدکننده اتومبیل محصولات خود را وارد بازار می‌کند، در ابتدای استفاده از اتومبیل‌ها، نرخ ازکارافتادگی آن‌ها بالاست و نیاز به آب‌بندی دارند. پس از دوران آب‌بندی نرخ شکست اتومبیل تقریباً ثابت بوده، و برای یک دوره نسبتاً طولانی اتومبیل بدون خرابی عمل می‌کند. آنگاه دوره ازکارافتادگی اتومبیل شروع می‌شود و نرخ شکست آن باگذشت زمان افزایش می‌یابد. در قابلیت اعتماد آماری، چنین رفتاری

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.
واژگان کلیدی. عمر مفید، توزیع‌های طول عمر، قابلیت اعتماد، تابع بقا .
* سخنران

توسط مدل‌های طول عمر با نرخ شکست U- شکل (وانی شکل) توصیف می‌شود. با بررسی و تحلیل متون قابلیت اعتماد می‌بینیم که بسیاری از داده‌های طول عمر دارای منحنی نرخ شکست وانی شکل هستند که این منحنی‌ها به طور وسیعی در قابلیت اعتماد مهندسی کاربرد دارند . در واقع منحنی‌های وانی شکل شامل سه قسمت هستند:

۱- خرابی‌های اولیه که نرخ شکست سیستم برای این دوره نزولی است، مانند اوایل از کارافتادگی، مرگ و میر نوزادان

۲- عمر مفید سیستم که در این دوره زمانی نرخ شکست تقریبا ثابت است و شکست به صورت تصادفی اتفاق می‌افتد.

۳- دوره از کارافتادگی سیستم که در این دوره نرخ شکست شروع به صعود می‌کند، مانند فرسودگی و کهنه شدن

خرابی‌هایی اولیه، به علت نقص تولید و یا نقایص تولد در مورد انسان آغاز می‌شود. شکست‌ها در دوره‌ی عمر مفید سیستم، شکست‌های احتمالی نامیده می‌شود. و درنهایت دوره فرسودگی، با افزایش زمان وقوع شکست به دلیل کهنه شدن آغاز می‌شود. توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست وانی شکل از اهمیت زیادی برخوردارند چون طول عمر فرآیندهای الکترونیک، الکترومکانیک و مکانیک اغلب از این ویژگی برخوردارند. در تحلیل‌های بقا نیز طول عمر بشر از این الگو پیروی می‌کنند. تعاریف زیادی در رابطه با نرخ شکست وانی شکل وجود دارد که در این جا به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید F تابع توزیع پیوسته با تابع نرخ شکست $h(t)$ باشد. گوییم F دارای نرخ شکست وانی شکل است.$(F \in BFR)$ [۱] اگر t_0 وجود داشته باشد به طوری که:

۱- برای هر $t < t_0$، $h(t)$ نزولی باشد.

۲- برای هر $t > t_0$ ، $h(t)$ صعودی باشد.

به عبارت دیگر، برای هر $t < t_0$ ؛ $h'(t) < 0$ و برای هر $t > t_0$ ؛ $h'(t) > 0$ باشد.([۱]).

تعریف زیر با استفاده از قابلیت اعتماد شرطی بیان شده است. فرض کنید T طول عمر یک قطعه باشد و بدانیم که طول عمر قطعه از t بیشتر است. قابلیت اعتماد شرطی T با شرط $T > t$ در زمان $X + t$ را با $R(x|t)$ نمایش می دهیم برابر است با

$$
\begin{aligned}
R(x|t) =& P(T > x + t|T > t)\\
=& \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)}\\
=& \frac{R(x + t)}{R(t)}
\end{aligned}
$$

تعریف ۲.۱. گوییم $F \in BFR$ اگر t_0 وجود داشته باشد به طوری که:

۱- به ازای $0 \leq t < t_0, 0 \leq x \leq t_0 - t$ ؛ $R(x|t)$ اکیداً صعودی باشد،

۲- به ازای $t_0 \leq t < \infty, x \geq 0$ ؛ $R(x|t)$ اکیداً نزولی باشد. ([۲])

تعریف ۳.۱. توزیع F یک توزیع طول عمر وانی شکل است اگر وجود داشته باشد $t \geq 0$ به طوری که:

۱- به ازای $0 \leq t < t_1$ ؛ $h(t)$ اکیداً نزولی باشد،

۲- به ازای $t_1 \leq t \leq t_2$ ؛ $h(t)$ ثابت باشد،

۳- به ازای $t \geq t_2$ ؛ $h(t)$ اکیداً صعودی باشد. ([۳])

۲. خواص BFR

زمانی که می‌گوییم F یک BFR است یعنی تابع نرخ شکست آن وانی شکل است به عبارتی $h(t) \in BFR$. در این بخش،برخی از خواص اساسی در محدوده تابع بقا و گشتاورهای یک متغیر تصادفی BFR را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱.۲. فرض کنید $F \in BFR$ ، آن گاه $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$ که G توزیع نمایی با میانگین $h(t_0)^{-1}$ است و t_0 نقطه‌ی تغییری است که $h(t)$ در آن مینیمم می‌شود.

---
[۱] Bathtub Shape

نتیجه ۲.۲. اگر $F \in BFR$ ، آن‌گاه F دارای گشتاورهای متناهی است و $k > 0$, $E(X^k) \leq \frac{\Gamma(k+1)}{h(t_0)^k}$.

نتیجه ۳.۲. توزیع وانی شکل F با گشتاور k ام $E(X^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{h(t_0)^k}$ (حول صفر)، لزوماً دارای توزیع نمایی است.

نتیجه ۴.۲. پیچش یک توزیع از کلاس های وانی شکل لزوماً یک توزیع وانی شکل نیست. در واقع، کلاس گسترده‌تر BFR که شامل توزیع های با نرخ شکست یکنوا است نیز تحت عمل پیچش بسته نیست.
به عنوان مثال فرض کنید:

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{\frac{-t}{2}}), t \geq 0, \qquad \bar{G}(t) = e^{-t}.$$

که به ترتیب توزیع‌هایی با نرخ شکست نزولی و ثابت هستند و حالت خاص نرخ شکست وانی شکل می‌باشد. تابع نرخ شکست پیچش $H = F * G$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(t) = P(X+Y < t) = &\int_0^t F_x(t-y) g_y(y) dy \\
= &\int_0^t [1 - \frac{1}{2}(e^{-(t-y)} + e^{-\frac{1}{2}(t-y)})] e^{-y} dy \\
= &1 - (\frac{t}{2}) e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
f(t) = &F'(t) \\
= &e^{-t}(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
h(t) = &\frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\
= &\frac{(t-1)e^{-t} + e^{\frac{-t}{2}}}{te^{-t} + 2e^{\frac{-t}{2}}}
\end{aligned}$$

که براساس آن، $h(4) = 0.5533, h(2) = 0.5, h(0) = 0$ و زمانی که $h(t) \to \infty$ آن گاه $h(t) \to 0.5$ بنابراین $h(t)$ نمی‌تواند توزیع وانی شکل داشته باشد.

نتیجه ۵.۲. آمیختن توزیع‌های وانی شکل لزوماً BFR نیست. به عنوان مثال، توزیع عمر زیر را در نظر بگیرید

$$\bar{F}(x) = 0.5\{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)\},$$

که

$$\begin{aligned}
&\bar{F}_1(x) = e^{-x}, \qquad x > 0, \\
&\bar{F}_2(x) = 2e^{-2x}(x + 0.5), \qquad x > 0,
\end{aligned}$$

واضح است که، F_1 و F_2، IFR هستند و بنابراین BFR هستند. $\phi(x) = -\log \bar{F}(x)$ را در نظر بگیرید. می‌بینیم که $\phi''(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$ است که

$$\psi_1(x) = -e^{-x}\{1 + e^{-x}(2x+1)\}^{-2}$$

$$\psi_2(x) = -4e^{-x} + 2x - 3$$

توجه کنید که $\psi_1(x) < 0$ برای همه مقادیر $x > 0$. همچنین $\psi_2(0) < 0$ و $\psi_2(\infty) = \infty$ است و $\psi_2(x)$ یک تابع پیوسته صعودی است. بنابراین $t_0 > 0$ وجود دارد به طوری‌که تابع $\phi(x)$ روی $[0, t_0)$ محدب، و روی بازه $[t_0, \infty)$ مقعر است. بنابراین F، BFR نیست. در واقع، تابع F توزیع وارون وانی شکل دارد.

نتیجه ۶.۲. فرض کنید یک سیستم سری با دو جزء مستقل داریم که طول عمر هر جزء آن BFR با یک نقطه عطفی مشترک t_0 است. آن‌گاه طول عمر سیستم دارای توزیع BFR با یک نقطه عطفی t_0 می‌شود.

نتیجه ۷.۲. یک سیستم موازی با دو جزء مستقل BFR ، لزوماً توزیع BFR ندارد.
به عنوان مثال، فرض کنید h_p تابع نرخ شکست ساختاری با اتصال موازی دو مؤلفه‌ی مستقل باشد که هر مؤلفه BFR با تابع بقا

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \leq \theta \\ \frac{1}{1+\theta} e^{(\frac{\theta^2}{2})} e^{-(\frac{x^2}{2})} & x > \theta \end{cases}$$

باشد که $\theta = 0.5(\sqrt{5}-1)$. آن‌گاه برای $x < \theta$

$$\begin{aligned} R_p(x) &= 1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - R_i(x) \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{1+x})(1 - \frac{1}{1+x}) \\ &= \frac{1+2x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

بنابراین h_p به صورت زیر بدست می‌آید

$$h_p(x) = \frac{2x}{(1+x)(1+2x)}$$

که نتیجه می‌دهد

$$h'_p(x) = \frac{2-4x^2}{(2x^2+3x+1)^2}$$

که برای $x \in [0, \theta[$، h'_p مثبت، بنابراین $h_p(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین سیستم نمی‌تواند BFR باشد.

۳. عمر مفید در توابع نرخ خطر وانی شکل

همانطور که گفتیم در توابع وانی شکل، منحنی در ابتدا به شدت کاهش می‌یابد و سپس انحنای آن شروع به تغییر می‌کند و نسبتاً ثابت می‌شود و بعد دوباره شروع به تغییر می‌کند و در آخر به شدت افزایش می‌یابد. همانطور که مشاهده می‌شود عمر مفید فاصله‌ی بین دو نقطه تعریف می‌شود که انحنا به‌سرعت تغییر می‌کند. توجه داشته باشید که اگر انحناء تابع $h(t)$ در نقطه t به سرعت تغییر کند، نمی‌توانیم برای این تابع در این نقطه هیچ دایره‌ایی با شعاع بی‌نهایت رسم کرد. از طرف دیگر، اگر t_0 نقطه‌ای باشد که تابع در آن ثابت است آنگاه می‌توان یک دایره با شعاع بی‌نهایت در آن نقطه رسم کرد. با در نظر گرفتن این موضوع، برای به دست آوردن طول عمر مفید سیستم، برای هر نقطه $(t, h(t))$ روی تابع نرخ شکست $h(t)$، شعاع دایره‌ی مناسب را بدست می‌آوریم. سپس دو مقدار از t که شعاع آن ها به حداقل می‌رسد را بدست می‌آوریم. این نقاط را نقاط پایانی و فاصله بین آن‌ها را عمر مفید توزیع عمر با نرخ شکست $h(t)$ می‌نامیم.
برای راحتی کار، با ماکزیمم کردن عکس شعاع کار می‌کنیم که آن را در آنالیز ریاضی انحنای تابع $h(t)$ می‌نامند. و آن را با k به عنوان تابعی از t تعریف می‌کنند. که به صورت زیر است:

$$k(t) = \frac{|h''(t)|}{(1+(h'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{۱.۳}$$

بنابراین با در نظر گرفتن مباحث بالا، ما به دنبال پیدا کردن دو نقطه هستیم که $k(t)$ در آن حداکثر می‌شود. که این دو نقطه $c_0 \leq c_1$ را نقاط محافظه‌کار عمر مفید (c_0, c_1) می‌نامیم.
تفسیرهای هندسی و شهودی از نقاط تغییر شکل انحنای $k(t)$ تعریف دیگری از عمر مفید را نشان می‌دهد. فرض

کنید u_0 بزرگترین نقطه تغییر شکل k در سمت چپ c_0 و u_1 کوچکترین نقطه تغییر شکل $k(t)$ در سمت راست c_1 باشد، آنگاه از این دو نقطه (u_0, u_1) برای تعریف عمر مفید سیستم استفاده می‌کنیم.

$$(c_0, c_1) \text{ عمر مفید محافظه کارانه } \subset \text{ دوره مفید } (u_0, u_1)$$

بدین معنا که دوره‌ی مفید محافظه‌کار همیشه از عمر مفید سیستم کمتر است. این تمایز به ما اجازه می‌دهد تا مفهوم «وانی شکل رضایت‌بخش » [۲] را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۳. می‌گوئیم تابع نرخ شکست وانی شکل رضایت‌بخش است اگر عمر مفید محافظه‌کارانه آن صفر نباشد یعنی $c_0 < c_1$. و وانی شکل رضایت نابخش [۳] است اگر عمر مفید محافظه‌کار آن صفر باشد یعنی $c_0 = c_1$. ([۴]).

در این بخش، در مورد اهمیت تخمین عمر مفید و طول آن بحث می‌کنیم.

- اول اینکه دانستن دوره مفید اطلاعاتی مفیدی در مورد تخمین زمان بهینه آب-بندی می دهد. آب‌بندی به طور گسترده در مهندسی قابلیت اعتماد استفاده می‌شود تا اقلام ضعیف را قبل از ورود به بازار از بین ببرند. در این فرآیند مؤلفه‌ها به عنوان آزمایش برای یک دوره ی b^*، که آن را دوره ی آب‌بندی می‌نامند، در یک آزمایش با حساسیت بالا قرار می‌گیرند. در این مدت مؤلفه های ضعیف از بین می روند و مؤلفه هایی که باقی می مانند با اطمینان خاطر برای استفاده به کار می روند. در فرآیند آب‌بندی، بعد از این که محصول از این دوره سالم بیرون می‌آید، مقدار بهینهb^* طوری تعیین می‌شود که مقیاس‌های قابلیت اعتماد آن مانند میانگین عمر باقی‌مانده $\mu(t)$ یا قابلیت اعتماد شرطی آن را ماکزیمم می‌کند و برخی از هزینه‌های تابع که از فرآیند آب‌بندی متحمل می‌شود و دیگر هزینه‌های تعمیر، جایگزینی یا گارانتی به حداقل می‌رسد.
  در این مطالعه، فرض اصلی این است که تابع نرخ شکست وانی شکل است. همانطور که اشاره شد در مدل‌های وانی شکل تابع نرخ شکست $h(t)$ در دو نقطه ی t_1, t_2 تغییر می‌کند و در فاصله (t_1, t_2) ثابت است که به آن عمر مفید سیستم گفتیم. معمولاً فرض بر این است که نقاط t_1, t_2 مشخص هستند و بنابراین زمان بهینه آب‌بندی براساس این دو نقطه به‌دست می‌آید. برای مثال، اگر معیار آب‌بندی براساس تابع نرخ شکست به‌دست آید، باید b^* قبل از t_1 اتفاق بیفتد و اگر براساس میانگین عمر باقیمانده باشد b^* باید قبل از نقطه تغییر $\mu(t)$ اتفاق افتد.
- دومین کاربرد عمر مفید سیستم، در الگوهای نگهداری پیشگیرانه از جمله تعویض بلوکی و تعویض سنی است که در زیر آن‌ها را بیان می‌کنیم.

برخی از سیستم‌ها مانند هواپیما، راکتورهای هسته‌ای که در زندگی با آنها سروکار داریم، دارای این ویژگی هستند که شکست آن‌ها ممکن است سبب صدمات جبران ناپذیری شود. بنابراین، در صورت از کارافتادن برخی از قطعات چنین سیستم‌هایی، خسارات ناشی از آن بسیار سنگین خواهد بود.در چنین حالاتی، برای نگهداری و تعمیر سیستم شیوه‌های گوناگونی اتخاذ می‌شود؛ به گونه‌ای که احتمال از کارافتادگی سیستم به حداقل برسد. یکی از مباحثی که در این بستر مطرح می‌شود، بحث نگهداری پیشگیرانه است. در نگهداری پیشگیرانه، یک سیستم پیش از آنکه دچار شکست شود، براساس شیوه‌ای معین تعویض شده یا مورد بررسی و تعمیر قرار می‌گیرد. بر همین اساس، در تعویض یا تعمیر قطعات پیش از خرابی شیوه‌هایی وجود دارد که در ادامه به دو روش متداول از این شیوه‌ها اشاره می کنیم. این دو روش به تعویض بلوکی و سنی معروف‌اند.
فرض کنید در زمان $t = 0$ سیستم شروع به کار می‌کند. در تعویض بلوکی، سیستم یا در زمان شکست تعویض می‌شود یا در زمان‌های $T, 2T, 3T, \ldots$ که در آن T یک مقدار از پیش تعیین شده است. در تعویض سنی، سیستم در زمان شکست و یا هنگامی که به سن T رسید تعویض می‌شود.
فرض کنید T^* زمان تعویض سنی است. تحت هر دو فرآیند تعویض سنی و تعویض بلوکی، $b^* + T^*$ باید بعد از

[۲] Comfortable bathtub shape
[۳] Uncomfortable bathtub shape

دومین نقطه تغییر t_2 از $h(t)$ اتفاق افتد. به عبارت دیگر طول عمر مفید معادل با زمان T^* است. بنابراین، T^* براساس $c_1 - c_0$ یا $u_1 - u_0$ و b^* براساس c_0 یا u_0 به‌دست می آید.

۴. توزیع پیوسته با نرخ شکست وانی شکل

بیشتر توزیع‌های وانی شکل دامنه‌ی نامحدودی دارند و فرض بر این است که طول عمر آن‌ها کران‌دار نیست. ولی چندین توزیع معرفی شده است که دامنه متناهی دارند و طول عمر آن‌ها نیز کران‌دار است. لای و همکاران [۵] توزیعی را با دامنه‌ی متناهی، که تابع نرخ شکست آن توسیع‌یافته تابع چگالی بتا است را معرفی می‌کنند که به فرم زیر است

$$h(t) = \lambda(t+p)^{\alpha-1}(q-t)^{\beta-1} \qquad 0 \leq t \leq q. \tag{۱.۴}$$

که $0 \leq \alpha < 1$، $\beta \leq 0$، $p \leq 0$ و $q, \lambda > 0$.

این مدل ۵ پارامتر دارد: دو پارامتر مکان p و q، دو پارامتر شکل α و β، و یک پارامتر ثابت λ. در حالت خاص اگر $p = 0$و $q = 1$ و λ ثابت نرمال‌ساز در نظر گرفته شود، توزیع نرخ شکست به فرم توزیع بتای استاندارد می‌شود. همانطور که می‌بینیم این توزیع پارامترهای زیادی دارد و به‌همین علت برازش دادن آن روی داده‌ها مشکل است. به همین منظور حالت خاصی از این مدل را در نظر می‌گیریم که علاوه بر کم بودن پارامترها، هنوز فرم وانی شکل بودن را دارد.

اگر $\alpha = \beta = 0$ آن‌گاه

$$h(t) = \frac{\lambda}{(t+p)(q-t)} = \frac{\lambda}{p+q}(\frac{1}{p+t} + \frac{1}{q-t}) \tag{۲.۴}$$

همانطور که می‌بینید معادله ۲.۴ به‌صورت سیستم مخاطره رقابتی با دو جزء است، یکی با نرخ شکست نزولی و دیگری با نرخ شکست صعودی است.

برای $p > 0$ و $0 \leq t \leq q$ تابع نرخ شکست تجمعی به‌صورت زیر است

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx = \frac{\lambda}{(p+q)}\log(\frac{p+t}{q-t}) - \frac{\lambda}{q+p}\log(\frac{p}{q}). \tag{۳.۴}$$

بنابراین تابع بقا به سادگی براساس رابطه ی $e^{-\int_0^t h(x)dx} = e^{-H(t)}$ بدست می‌آید

$$\bar{F}(t) = (\frac{1-\frac{t}{q}}{1+\frac{t}{p}})^{\frac{\lambda}{q+p}}. \tag{۴.۴}$$

تابع چگالی برابر است با

$$f(t) = \bar{F}(t).h(t) = (\frac{1-\frac{t}{q}}{1+\frac{t}{p}})^{\frac{\lambda}{q+p}}(\frac{\lambda}{(t+p)(q-t)}). \tag{۵.۴}$$

که می‌توان به صورت زیر نوشت

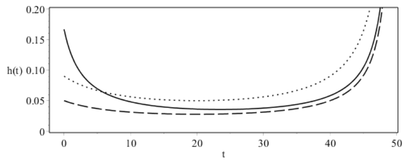
$$f(t) = \lambda(\frac{p}{q})^{\frac{\lambda}{q+p}}(q-t)^{\frac{\lambda}{q+p}-1}(p+t)^{\frac{-\lambda}{(p+q)}-1}. \tag{۶.۴}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع چگالی در $t = q$ تعریف نشده است مگر اینکه $\lambda \geq p+q$.

۱.۴. **شکل تابع نرخ شکست.** واضح است که تابع نرخ شکست در $t = 0$ متناهی و برابر

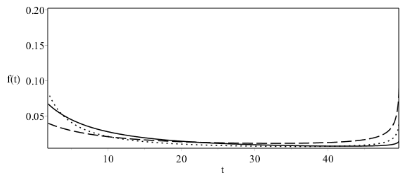
$$h(t) = \frac{\lambda}{pq}.$$

است و چون $(p+t)(q-t)$ در حالت $p < q$ یک چند جمله‌ای مقعر است، بنابراین $h(t)$ محدب با نقطه برگشت $t = \frac{q-p}{2}$ است. بنابراین، اگر $p < q$ آن‌گاه $h(t)$ وانی شکل و اگر $p > q$ نرخ شکست IFR است. شکل تابع نرخ شکست برای مقادیر مختلف λ, q, p در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: تابع نرخ شکست برای $q = 50$ و مقادیر $\lambda = 25, p = 3$ (خط) و $\lambda = 25, p = 3$ (خط تیره) $\lambda = 45, p = 10$ (خط نقطه ای)

۲.۴. شکل تابع چگالی. شکل ۲ تابع چگالی برای مقادیر مختلف λ, q, p را نشان می‌دهد. توجه کنید که در $t = q$ تابع نرخ شکست همواره بی‌نهایت می‌شود ولی تابع چگالی بسته به اینکه $\lambda < q + p$ ممکن است بی‌نهایت یا صفر شود.



شکل ۲: تابع چگالی برای $q = 50$ و مقادیر $\lambda = 25, p = 3$ (خط) و $\lambda = 25, p = 3$ (خط تیره) $\lambda = 45, p = 10$ (خط نقطه ای)

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مطالعه توابع وانی شکل و ویژگی هایی آن ها پرداختیم. همانطور که ملاحظه می شود اکثر کالاهای تولید شده دارای نرخ شکست وانی شکل هستند. میزان گارانتی این کالاها براساس دوره عمر مفید محاسبه می شود که در این دوره نرخ شکست کالا ثابت و احتمال خرابی آن خیلی کم است.

مراجع

1. Glaser, R. E. (1980). *Bathtub and related failure rate characterizations*, Journal of the American Statistical Association,75, 667-672.
2. Haupt, E., Schabe, H. (1997). *The TTT transformation and a new bathtub distribution model*, Journal of Statistical Planning and Inference,60, 229-240.
3. Mitra, M., Basu, S. K. (1995), *Change point estimation in non-monotonic ageing models*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 47, 483-491.
4. Bebbington, M., Lai, C.D., Zitikis, R. (2006).*Useful periods for lifetime distributions with bathtub shaped hazard rate functions*, IEEE Transactions on Reliability, 55, 245-251.
5. Lai, CD., Jones G. (2015),*Beta hazard rate distribution and applications*, IEEE Transactions on Reliability, 64, 44-50.